Sur l'aire balayée par un segment mobile[1]

par Arkadiusz Płoski

December 13, 1996

> "Le segment reliant le Soleil à la planète
> balaye des aires égales en des temps égaux"
> La deuxième loi de Kepler.

Le révérend Hamnet Holditch, recteur du Collège Cajus à Cambridge a publié en 1858 un théorème concernant l'aire balayée par un segment de droite. Pour présenter son résultat considérons une courbe plane fermée C_1 et le segment P_1P_2 de longeur $a+b$ ($a > 0$, $b > 0$) avec les extrémités sur C_1. Soient P le point de P_1P_2 tel que $PP_1 = b$ et $PP_2 = a$ et C la courbe décrite par le point P quand le segment P_1P_2 fait un tour complet dans le sens positif c'est-à-dire inverse des aiguilles d'une montre. Alors, avec les hypothèses ci-dessus nous avons le

Théorème de Holditch. L'aire entre les courbes C, C_1 est égale à πab.

Notons encore une hypothèse sous-entendue: la courbe et le segment sont telles qu'on puisse déplacer le segment de sorte qu'il fasse un tour complet avec les étrémités restant sur la courbe. Une telle déplacement du segment n'est pas toujours possible: considérons un rectangle et sa diagonale. Dans un article publié dans le journal polonais "Delta" P. Kenderow et K. Kolarow, mathématiciens bulgares ont donné quelques exemples intéressants illustrant le théoréme de Holditch. Ils ont montré que, si C_1 est un hexagon alors les courbes C décrites par les points des segments se déplaçant dans C_1 ressemblent aux countours des anciennes forteresses et ne sont pas, en général, convexes. Ils ont étudié aussi le cas où C_1 est un triangle de Reuleaux (c'est une figure bien connue, de largeur constante). Dans ce cas le centre du segment mobile se déplace de sorte qu'il fait une partie de son trajet dans le sens negatif, la courbe C a des points de croisement et l'aire bornée par C doit être affectée d'un signe convenable.

---

[1] 6ème Semaine de Français Scientifique en Mathématiques, Krynica, Novembre 1996

Arne Broman, mathématicien suédois a dit que le théoréme de Holditch est plus profond que son auteur ne le pensait en 1858. Il a donné une démonstration de ce théoreme en 1978. Malheuresement son article a été publié dans un journal suédois inaccessible en Pologne.

Peu après la lecture de l'article de MM Kenderow et Kolarow je préparais des exercises pour mes étudians en me servant du cours classique d'analyse mathématique de R. Courant. Quelle était ma surprise de trouver dans les exercises au chapitre sur les intégrales curvilignes et de surface de ce cours une démonstration du théorème de Holditch, due à J. Steiner, célèbre géomètre suisse. Pour rendre les raisonements de Steiner rigoureux j'ai donné au théorème de Holditch une autre formulation en même temps plus générale et plus facile à formaliser. De plus la notion d'indice s'est avérée très utile.

Considérons maintenant un segment mobile P_1P_2 avec un point distingué P. Notons $PP_1 = b$, $PP_2 = a$ et supposons que le segment P_1P_2 se déplace de façon que le plan rigide lié à P_1P_2 tourne n fois par rapport au plan sur lequel le mouvement du segment est exercé.

Théorème. Notons S_i l'aire balayée par le point P_i. Alors l'aire S balayée par le point P est donnée par la formule

$$S = \frac{aS_1 + bS_2}{a+b} - \pi abn.$$

Supposons maintenant que P_1P_2 est le segment du théorème de Holditch. Alors $n = +1$, $S_2 = S_1$ est égal à l'aire bornée par la courbe C_1 tandis que S est égal à l'aire bornée par la courbe C. D'après notre formule $S = S_1 - \pi ab$ et le théoreme de Holditch est démontré.

Avant de passer à la démonstration de notre théoreme il nous faut préciser les notions qui y apparaissent. Soit $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal du plan. Pour deux vecteurs $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath}$ notons $[\vec{u}, \vec{v}] = u_1v_2 - u_2v_1$ aire du parallélogramme ayant pour cotés les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$. Désignons par $\vec{E}$ l'espace vectoriel de vecteurs du plan. Une fonction vectorielle $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \vec{E}$ continûment différentiable telle que $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi)$ est appelée vecteur mobile. La dernière condition veut dire qu'un vecteur mobile revient à la position initiale.

Notons que la trajectoire de $\vec{r}$ c'est–à–dire l'ensemble de points pour lesquels $\vec{r}(t)$ avec un $t \in [0, 2\pi]$ est un rayon vecteur est une courbe. En général, la trajectoire possède des points multiples corespondant à deux on plusieus valeurs distinctes de t. Un polygone est une trajectoire d'un vecteur $\vec{r}$; aux sommets la vitesse du vecteur $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ est égale à zéro.

Définition 1. On entend par aire balayée par le vecteur mobile $\vec{r}$ la quantité

$$S(\vec{r}) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\vec{r}, \dot{\vec{r}}]\, dt.$$

Pour justifier cette définition notons $S_{t_1}^{t_2}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} [\vec{r}, \dot{\vec{r}}]\, dt$ l'aire balayée par le vecteur mobile $\vec{r}$ dans l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$. Alors, on vérifie facilement les proprietés suivantes:

(1.1) l'aire est une quantité additive:

$$S_{t_1}^{t_2}(\vec{r}) + S_{t_2}^{t_3}(\vec{r}) = S_{t_1}^{t_3}(\vec{r}) \qquad \text{pour } t_1 < t_2 < t_3,$$

(1.2) l'aire $S_t^{t+\Delta t}(\vec{r})$ diffère de l'aire du triangle ayant pour cotés les vecteurs $\vec{r}(t)$, $\vec{r}(t+\Delta t)$ par un infiniment petit par rapport à Δt: $S_t^{t+\Delta t}(\vec{r}) = \frac{1}{2}[\vec{r}(t), \vec{r}(t+\Delta t)] + o(\Delta t)$ pour $\Delta t \to 0$.

Les proprietés (1.1) et (1.2) ont la signification géomètrique évidente et caractèrisent l'aire $S_{t_1}^{t_2}(\vec{r})$.

Définition 2. On appele indice $\mathrm{ind}(\vec{r}, \vec{0})$ du vecteur mobile $\vec{r}$ na passant pas par l'origine $\vec{0}$ la valeur de l'integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)]}{|\vec{r}(t)|^2} dt$$

Rappelons ici que l'indice $\mathrm{ind}(\vec{r}, \vec{0})$ est un entier qui montre combien de fois le vecteur mobile $\vec{r}$ tourne autour de l'origine. Traditionnellement cette notion est expliquée dans les cours d'analyse complexe (cf. H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieus variables complexes).

Nous pouvons maintenant démontrer notre théorème. Soient $\vec{r}_1 = \vec{OP_1}$, $\vec{r}_2 = \vec{OP_2}$, $\vec{r} = \vec{OP}$ les rayons vecteurs des points P_1, P_2, P. Alors les vecteurs mobiles $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}$ satisfont aux rélations: $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| = a + b$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et $\vec{r} = \frac{a}{a+b}\vec{r}_1 + \frac{b}{a+b}\vec{r}_2$.

Le nombre n des rotations du segment mobile, c'est l'indice $\mathrm{ind}(\cancel{\vec{r}}, \vec{0})$. / $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$

On voit aisément que

(1) $\quad S(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \pi(a+b)^2 n,$

de plus

(2) $\quad S(\vec{r}_i) = S_i \quad$ pour $i = 1, 2$ et $S(\vec{r}) = S$.

Un simple calcul montre que l'on a:

$$(3) \qquad S(\vec{r}) = \frac{a}{a+b} S(\vec{r}_1) + \frac{b}{a+b} S(\vec{r}_2) - \frac{ab}{(a+b)^2} S(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

En rapprochant les formules (1), (2) et (3) nous obtenons le résultat desiré.