Analytic Functions, Błażejewko 1982, 389-393,
Lecture Notes in Math., 1039, Springer, Berlin 1983.

SUR LES DÉRIVATIONS DES ANNEAUX DES SÉRIES CONVERGENTES

Arkadiusz Płoski (Kielce)

Résumé. Nous donnons une démonstration de l'inegalité de S. Łojasiewicz pour les fonctions analytiques ayant un zéro isolé.

1. Soit $C_n = K\{x\}$ l'anneau des séries convergentes des variables $(x_1,\dots,x_n) = x$ à coefficients dans un corps valué K de caractéristique zéro. On note $m(C_n)$ l'idéal maximal de C_n, $\mathrm{Der}(C_n)$ le C_n-module des dérivations de l'anneau C_n dans C_n. Alors $\mathrm{Der}(C_n)$ est engendré par les dérivations partielles $\partial/\partial x_i$. Pour tout idéal I de C_n nous poserons $\mathrm{Der}(I) = \{D \in \mathrm{Der}(C_n) : D(I) \subset I\}$.

1.1. THÉORÈME. *Soit I un idéal premier de C_n. On a:*

(i) *si $f \in m(C_n)$ et $Df \equiv 0\,(I)$ pour toute dérivation $D \in \mathrm{Der}(I)$ alors $f \equiv 0\,(I)$;*

(ii) *si $f, g \in m(C_n)$ et $DfD'g - D'fDg = 0\,(I)$ pour toutes dérivations $D, D' \in \mathrm{Der}(I)$ alors il existe une série $P(u,v) \neq 0$ dans $K\{u,v\}$ telle que $P(f,g) \equiv 0\,(I)$.*

La démonstration du théorème repose sur la proposition suivante:

1.2. PROPOSITION. *Soit I un idéal premier de C_n, $d = \dim(C_n/I) > 0$ et soit $h = (h_1,\dots,h_d)$ un système de paramètres mod I (c'est-à-dire: l'idéal $(h_1,\dots,h_d)C_n + I$ est un idéal de définition dans l'anneau C_n). Alors il existe des dérivations $D_1,\dots,D_d \in \mathrm{Der}(I)$ telles que $D_i h_j \equiv 0\,(I)$ pour $i \neq j$ et $D_i h_i \not\equiv 0\,(I)$ pour $i = 1,\dots,d$.*

Démonstration de la proposition. Posons $J = \{f(t,x) \in K\{t,x\} : f(h(x),x) \equiv 0\,(I)\}$. Alors J est un idéal premier de $K\{t,x\}$, les variables $t = (t_1,\dots,t_d)$ forment un système de paramètres mod I, $I \subset J$ et $t_i \equiv h_i(x)(J)$ pour $i = 1,\dots,d$. Il suffit de démontrer (1.2) pour l'idéal J et le système de paramètres $t = (t_1,\dots,t_d)$. En effet supposons qu'il existe des dérivations

$$\bar{D}_i = \sum_k a_{ik}(t,x)\frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_l b_{il}(t,x)\frac{\partial}{\partial x_l}$$

telles que $\bar{D}_i \in \mathrm{Der}(J)$, $\bar{D}_i t_j \equiv 0\,(J)$ pour $i \neq j$ et $\bar{D}_i t_i \equiv 0\,(J)$. Posons

$$D_i = \sum_l b_{il}(h(x), x)\frac{\partial}{\partial x_l}$$

pour $i = 1,\ldots,d$, un simple calcul montre que les dérivations D_i vérifient les conditions de (1.2). Pour construire les dérivations $\bar{D}_i$ rappelons la description d'un idéal premier de $K\{t,x\}$.

1.3. LEMME (cf. [2], chapitre IV, théorème 5.1). *Soit J un idéal premier de $K\{t,x\}$ tel que les variables $t = (t_1,\ldots,t_d)$ forment un système de paramètres* mod J. *Alors il existe une suite de polynômes*

$$P_i = P_i(t, x_1,\ldots,x_i) = c_{i0}(t)x_i^{m_i} + \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}(t, x_1,\ldots,x_{i-1})x_i^{m_i-j}$$

telle que

a) $P_i \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,J)$, $m_i > 0$, $c_{i0}(t) \not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,J)$, $\dfrac{\partial P_i}{\partial x_i} \neq 0\,(\mathrm{mod}\,J)$ *pour* $i = 1,\ldots,n$;

b) *si* $c(t) = \prod_i c_{i0}(t)$ *alors pour toute série* $f(t,x) = 0\,(J)$ *il existe un entier* $N > 0$ *tel que* $c(t)^N f(t,x) = 0\,(\mathrm{mod}(P_1,\ldots,P_n)K\{t,x\})$.

Dans [2] on démontre le lemme 1.3 dans le cas formel en utilisant le fait que l'application canonique $K\{t\} \longrightarrow K\{t,x\}/J$ est injective et finie. Le cas analytique se traite de manière analogue.

Posons maintenant

$$\bar{D}_i g = \frac{\partial(P_1,\ldots,P_n, g)}{\partial(t_i, x_1,\ldots,x_n)} \quad \text{pour } i = 1,\ldots,d.$$

Les conditions a) entraînent les relations

$$\bar{D}_i t_i = (-1)^{n+1}\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial P_n}{\partial x_n} \quad \text{pour } i = 1,\ldots,d \quad \text{et} \quad \bar{D}_i t_j = 0$$

dans $K\{t,x\}$ pour $i \neq j$. Il reste à prouver que $\bar{D}_i \in \mathrm{Der}(J)$ pour $i = 1,\ldots,d$. Dans ce but supposons que $g \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,J)$ alors d'après la condition b) du lemme il existe des séries $Q_1,\ldots,Q_n \in K\{t,x\}$ telles que $c(t)^N g \equiv Q_1P_1 + \ldots + Q_nP_n$ ce qui, après dérivation par rapport à t_k, x_l conduit à

$$c(t)^N\frac{\partial g}{\partial t_k} \equiv Q_1\frac{\partial P_1}{\partial t_k} + \ldots + Q_n\frac{\partial P_n}{\partial t_k}\,(\mathrm{mod}\,J),$$

$$c(t)^N\frac{\partial g}{\partial x_l} \equiv Q_1\frac{\partial P_1}{\partial x_l} + \ldots + Q_n\frac{\partial P_n}{\partial x_l}\,(\mathrm{mod}\,J).$$

Ce dernier système de relations implique que $c(t)^N \bar{D}_i g \equiv 0 \pmod J$, alors $\bar{D}_i g \equiv 0 \pmod J$ ce qui démontre la proposition.

Démonstration du théorème. Soit $h = (h_1, \ldots, h_d)$ un système de paramètres mod I. Pour toute série $f \in m(C_n)$ notons $P_f = P_f(t: v) \in K\{t\}[v]$ le polynôme minimal de f mod I (cf. [1], chapitre IV, pp. 195-6). Alors P_f est un polynôme distingué tel que:

(a) $P_f(h,f) \equiv 0\,(I)$,

(b) pour toute série $Q(t,v) \in K\{t,v\}$ telle que $Q(h,f) \equiv 0\,(I)$ le polynôme P_f divise Q dans $K\{t,v\}$. Soit $D_1, \ldots, D_d \in \mathrm{Der}\, I$ un système de dérivations tel que dans (1.2). Nous monterons d'abord que pour toute série $f \in m(C_n)$ et pour tout $i = 1, \ldots, d$ la condition $D_i f \equiv 0 \pmod I$ entraîne $(\partial/\partial t_i) P_f = 0$ dans $K\{t,v\}$. En effet, d'après (a) on a $D_i(P_f(h,f)) \equiv 0 \pmod I$, alors

$$\frac{\partial P_f}{\partial t_i}(h,f)\, D_i h_i + \frac{\partial P_f}{\partial v}(h,f)\, D_i f \equiv 0 \pmod I.$$

Il résulte de là et de l'hypothèse $D_i f \equiv 0 \pmod I$ que $(\partial/\partial t_i) P_f(h,f) \equiv 0 \pmod I$ ce qui implique d'après b) que P_f divise $(\partial/\partial t_i) P_f$; alors $(\partial/\partial t_i) P_f = 0$ dans $K\{t,v\}$ car $\deg_v[(\partial/\partial t_i) P_f] < \deg_v(P_f)$.

Soit maintenant $f \in m(C_n)$ une série telle que $Df \equiv 0 \pmod I$ pour $D \in \mathrm{Der}\, I$, en particulier $D_i f \equiv 0 \pmod I$ pour $i = 1, \ldots, d$; alors $(\partial/\partial t_i) P_f = 0$ dans $K\{t,v\}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, d'où $P_f(t,v) = v$ ce qui démontre (i). Pour vérifier (ii) considérons des séries f, g $m(C_n)$ telles que $D f D' g - D' f D g \equiv 0 \pmod I$ pour $D, D' \in \mathrm{Der}\, I$. On peut supposer $g \not\equiv 0 \pmod I$, alors il existe un système de paramètres $h_1, \ldots, h_d$ avec $h_1 = g$. Les rélations $D_i f\, D_j g - D_j f\, D_i g \equiv 0 \pmod I$ impliquent $D_i f \equiv 0 \pmod I$ pour $i = 2, \ldots, d$, d'où $(\partial/\partial t_i) P_f = 0$ pour $i > 1$, alors $P_f = P(t_1, v)$. Ceci prouve (ii).

2. Nous donnerons maintenant des conséquences du théorème 1.1.

2.1. COROLLAIRE (cf. [4], chapitre II, cor. 8.3 à la page 50). Pour toute série $f \in m(C_n)$ on a:

$$f \in \mathrm{rad}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) C_n.$$

Démonstration. D'après (i) pour tout idéal premier I: $(\partial/\partial x_1) f, \ldots, (\partial/\partial x_n) f \in I \Longrightarrow f \in I$. Il suffit de rappeler le fait que le nilradical d'un idéal est une intersection d'idéaux premiers.

2.2. COROLLAIRE. Si $f, g \in m(C_n)$ alors il existe une série $P(u,v) \neq 0$ dans $K\{u,v\}$ telle que

$$P(f,g) \in \left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x_1,x_2)}, \ldots \frac{\partial(f,g)}{\partial(x_{n-1},x_n)}\right)C_n.$$

Démonstration. On a:

$$\mathrm{rad}\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x_i,x_j)}\right)C_n = I_1 \cap \ldots \cap I_s,$$

où $I_1,\ldots,I_s$ sont des idéaux premiers. Si $D, D' \in \mathrm{Der}\, C_n$, alors

$$D f D' g - D' f D g \equiv 0, \mod\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x_i,x_j)}\right)C_n \subset I_l \quad \text{pour } l = 1,\ldots,s.$$

D'après (ii) il existe une série $P_l(u,v) \neq 0$ telle que $P_l(f,g) \equiv 0(I_l)$, donc $\prod P_l(f,g) \in \bigcap I_l$. Par définition du nilradical il existe un entier $p > 0$ telle que la série $(\prod P_l(f,g))^p$ appartienne à l'idéal engendré par les jacobiens $\partial(f,g)/\partial(x_i,x_j)$. Il suffit alors de poser $P(u,v) = (\prod P_l(u,v))^p$.

2.3. Exemple. Nous déduisons du corollaire 2.2 un cas particulier de l'inegalité de Łojasiewicz (cf. e.g. [3]): Soit $f \in \mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$ une série sans terme constant convergente dans un voisinage U de zéro de $\mathbb{R}^n$ telle que $f(c) > 0$ pour $c \in U \setminus \{0\}$. Alors il existe des constantes $A > 0$, $q > 0$ telles que $f(c) \geq A|c|^q$ pour $c \in U$ assez petit.

Démonstration. Posons $g(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ et soit $P(u,v)$ une série telle que

$$(*) \qquad P(f(x), g(x)) = \sum_{i<j} q_{ij}(x)\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

En diminuant U si nécessaire on peut supposer que les séries $q_{ij}(x)$ sont convergentes dans U et que la série $P(u,v)$ converge dans un voisinage de l'ensemble $\{(f(c), g(c)) : c \in U\}$. Soit $m_f(r) = \min\{f(c) : |c| = r\}$; alors $f(c) \geq m_f(|c|)$ pour $c \in U$ assez petit. Pour tout $r > 0$ tel que $\{c \in \mathbb{R}^n : |c| = r\} \subset U$ on a $m_f(r) = f(c(r))$ où $|c(r)| = r$ et

$$c_i(r)\frac{\partial f}{\partial x_j}(c(r)) - c_j(r)\frac{\partial f}{\partial x_i}(c(r)) = 0 \quad \text{pour } i,j = 1,\ldots,n;$$

alors $P(m_f(r), r^2) = 0$ d'après (*). Le théorème de Puiseux affirme l'existence de constantes $A > 0$ et $q > 0$ telles que $m_f(r) > A r^q$ pour r assez petit, ce qui achève la démonstration de l'inegalité.

Ouvrages cités

[1] ABHYANKAR, S. S.: Local analytic geometry, Academic Press, New York - London 1964.

[2] LEFSCHETZ, S.: Algebraic geometry, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1953.

[3] ŁOJASIEWICZ, S.: Semi-analytic sets, Global analysis and its applications III, International Atomic Energy Agency, Vienna 1974, pp. 25-29.

[4] TOUGERON, J. C.: Idéaux de fonctions différentiables, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1972.

Staszica 4 m. 3
PL-25-008 Kielce
Poland