BULLETIN OF THE POLISH
ACADEMY OF SCIENCES
MATHEMATICS
Vol. 32, No. 3-4, 1985

Sur l'exposant d'une application analytique II

by

Arkadiusz PŁOSKI

Présenté par. S. ŁOJASIEWICZ le 17 décembre 1984

Summary. Let $f=(f_1,\dots,f_n)$ be a holomorphic mapping having an isolated zero at the origin. Let $l_0(f)$ be the Łojasiewicz exponent of the mapping f at the point $0\in\mathbf{C}^n$; then there exist integers $N, a, b>0$ such that $l_0(f)=N+\frac{b}{a}$ with $0<b<a<N^{n-1}$ or $l_0(f)=N$.

1. Nous allons considérer les applications analytiques $f=(f_1,\dots,f_n)$ d'un voisinage de zéro de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ finies à zéro c'est-à-dire telles que $f(0)=0$ et 0 est un point isolé de la fibre $f^{-1}(0)$. Si f est finie à zéro alors la multiplicité $m_0(f)$ et l'exposant $l_0(f)$ de f (cf. [6], definition 1.4) sont bien definis. Notons que $l_0(f)$ comme $m_0(f)$ ne dépend que de l'algèbre locale d'application f. L'exposant $l_0(f)$ peut être calculé à aide des arcs analytiques (cf. [4]). On a: $l_0(f)=\sup\left\{\frac{\operatorname{ord}_t f(z(t))}{\operatorname{ord}_t z(t)}: z(t)\in\mathbf{C}\{t\}^n\ z(0)=0\right\}$. De plus la borne supérieure dans la formule ci-dessus est atteinte (cf. [4], p. 49). L'exist ance de l'arc donnant le maximum se démontre aussi par la méthode presentée dans [6]. L'exposant $l_0(f)$ est un nombre rationnel $\geqslant 1$ (cf. [4, 6]). Le but de cette note est de présenter un raffinement de ce résultat.

(1.1) THÉORÈME. *Pour toute application analytique $f=(f_1,\dots,f_n)$ finie à zéro il existe des entiers $N, a, b>0$ tels que*

$$l_0(f)=N+\frac{b}{a} \text{ avec } 0<b<a<N^{n-1} \text{ ou } l_0(f)=N.$$

Le théorème découle directement des propositions suivantes.

(1.2) PROPOSITION. *Si $l_0(f)=\frac{p}{q}$ où p, q des entiers relativement premiers alors $p\leqslant m_0(f)$.*

(1.3) PROPOSITION (cf. [2]). *Pour toute application analytique f finie à $0 \in \mathbf{C}^n$ on a: $m_0(f) \leqslant ([l_0(f)])^n$ où [ ] designe la partie entière.*

Démonstration du théorème (1.1). Supposons que $l_0(f)$ n'est pas entier et notons $N = [l_0(f)]$. Nous pouvons alors écrire $l_0(f) = N + \frac{b}{a}$ où $0 < b < a$ sont des entiers relativement premiers. Les entiers $aN+b$, a sont aussi relativement premiers et nous avons d'après (1.2) et (1.3) $aN+b \leqslant m_0(f) \leqslant N^n$ ce qui évidemment entraîne $a < N^{n-1}$.

La démonstration de (1.2) a été donnée dans [6]. Nous déduirons (1.3) des lemmes présentés ci-dessous.

(1.4) LEMME (suggéré par T. Winiarski). *Soient $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une application analytique finie à zéro, $g = (g_1, \ldots, g_n)$ une application analytique d'un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ telle que $ord_0(g-f) = \min(ord_0(g_i - f_i)) > l_0(f)$. Alors g est finie à zéro, $l_0(g) = l_0(f)$ et $m_0(g) = m_0(f)$.*

Démonstration de (1.4). Il existe des constantes $R, C, C_1 > 0$ telles que $|f(z)| \geqslant C|z|^{l_0(f)}$ et $|g(z) - f(z)| \leqslant C_1 |z|^{\mathrm{ord}_0(g-f)}$ pour $|z| \leqslant R$. On a alors pour $|z|$ assez petit $|g(z)| \geqslant |f(z)| - |g(z) - f(z)| \geqslant C|z|^{l_0(f)} - C_1|z|^{\mathrm{ord}_0(g-f)} \geqslant C_2|z|^{l_0(f)}$ avec $C_2 > 0$ car $l_0(f) > \mathrm{ord}_0(g-f)$. L'inégalité $|g(z)| \geqslant C_2|z|^{l_0(f)}$ implique que g est finie à zéro et $l_0(g) \leqslant l_0(f)$ d'où $\mathrm{ord}_0(f-g) > l_0(g)$. Par symétrie nous avons $l_0(f) \geqslant l_0(g)$ alors $l_0(f) = l_0(g)$. De la même manière on montre que $f^{-1}(0) \cap B_r = g^{-1}(0) \cap B_r = \{0\}$ et $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$ pour $z \in Fr(B_r)$ où $B_r = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| \leqslant r\}$ est une boule suffisamment petite. L'égalitè $m_0(g) = m_0(f)$ découle du théorème de Rouché (cf. [9]).

(1.5) LEMME. *Pour toute application polynomiale $g = (g_1, \ldots, g_n)$* finie à zéro on a: $m_0(g) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \deg g_i$.

Démonstration de (1.5). Soit U un voisinage de zéro de $\mathbf{C}^n$ tel que $g^{-1}(0) \cap U = \{0\}$. Choisissons une suffisamment petite valeur regulière w de g, alors par définition de multiplicité nous avons $m_0(g) = \#(g^{-1}(w) \cap U) \leqslant \leqslant \# g^{-1}(w)$. D'autre part d'après le théorème de Bezout (cf. [8]) on a: $\# g^{-1}(w) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \deg g^i$.

Démonstration de la proposition (1.3). Soit g_i le polynôme de Taylor de f_i tel que $\mathrm{ord}_0(g_i - f_i) > l_0(f)$, évidemment on a $\deg g_i \leqslant [l_0(f)]$ pour $i = 1, \ldots, n$. Posons $g = (g_1, \ldots, g_n)$. D'après les lemmes (1.4) et (1.5) nous obtenons $m_0(f) = m_0(g) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \deg g_i \leqslant ([l_0(f)])^n$.

REMARQUE. Il vient de la proposition (1.2) que pour tout entier $m \geqslant 1$ l'ensemble d'exposants $l_0(f)$ où f parcourt les applications analytiques finies

à zéro telles que $m_0(f) = m$ est un ensemble fini. Voilà l'évaluation exacte de $l_0(f)$ pour $m_0(f) \leqslant 9$ (n quelconque):

$m_0(f)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$l_0(f)$	1	2	3	2, 4	3, 5	3, 4, 6	$3\frac{1}{2}$, 4, 5, 7	2, 4, 5, 6, 8	3, $4\frac{1}{2}$, 5, 6, 7, 9

2. Soit $\Sigma\, h_{i_1 \dots i_n} z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$ la série de Taylor du germe $(h, 0)$ d'une fonction holomorphe h. Posons $\operatorname{supp}(h) = \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n : h_{i_1 \dots i_n} \neq 0\}$. Pour toute suite d'entiers positifs $d = (d_1, \dots, d_n)$ notons $o_d(h) = \inf\{d_1 i_1 + \dots + d_n i_n : (i_1, \dots, i_n) \in \operatorname{supp} h\}$, $\operatorname{in}_d(h) =$ la somme de tous les monômes $h_{i_1 \dots i_n} z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$ satisfaisant à la condition $d_1 i_1 + \dots + d_n i_n = o_d(h)$. Si $f = (f_1, \dots, f_n)$ est une application analytique alors posons $o_d(f) = \min_{i=1}^{n} (o_d(f_i))$, $\operatorname{in}_d(f) = (\operatorname{in}_d(f_1), \dots, \operatorname{in}_d(f_n))$. Evidemment pour $d = (1, \dots, 1)$ on a: $o_d = \operatorname{ord}$, $\operatorname{in}_d = \operatorname{in}$.

(2.1) Proposition. *Soit $f = (f_1, \dots, f_n)$ une application analytique d'un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ telle que $(\operatorname{in}_d f)^{-1}(0) = 0$ pour une suite d'entiers positifs $d = (d_1, \dots, d_n)$. Alors f est finie à éro et $m_0(f) = \prod_{i=1}^{n} \frac{o_d(f_i)}{d_i}$.*

La proposition (2.1) est une consequence facile de la proposition 2.1 de [7] (voir également [1], p. 155). Dans cette section nous démontrerons un analogue de (2.1) pour l'exposant $l_0(f)$.

(2.2) Proposition. *Avec les hypothèses de* (2.1) *on a:*

$$\frac{\max_{i=1}^{n} (o_d(f_i))}{\max_{i=1}^{n} (d_i)} \leqslant l_0(f) \leqslant \frac{\max_{i=1}^{n} (o_d(f_i))}{\min_{i=1}^{n} (d_i)}.$$

La démonstration de (2.2) s'appuie sur deux lemmes.

(2.3) Lemme. *Si $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $h = (h_1, \dots, h_n)$ sont des applications analytiques finies à zéro alors*

$$\frac{l_0(f \circ h)}{l_0(h)} \leqslant l_0(f) \leqslant \frac{l_0(f \circ h)}{\operatorname{ord} h}.$$

Démonstration de (2.3). Il existe des constantes $R, C, C_1 > 0$ telles que $|f(h(z))| \geqslant C\, |z|^{l_0(f \circ h)}$ et $|h(z)| \leqslant C_1\, |z|^{\operatorname{ord}_0(h)}$ pour $|z| \leqslant R$, d'où $|f(h(z))| \geqslant$ $\geqslant C_2\, |h(z)|^{\frac{l_0(f \circ h)}{\operatorname{ord} h}}$ avec $C_2 > 0$ pour $|z|$ assez petit. Mais h est surjective alors $|f(w)| \geqslant C_2\, |w|^{\frac{l_0(f \circ h)}{\operatorname{ord} h}}$ pour $|w|$ assez petit ce qui entraîne $l_0(f) \leqslant \frac{l_0(f \circ h)}{\operatorname{ord} h}$. L'inégalité $l_0(f \circ h) \leqslant l_0(f)\, l_0(h)$ est évidente.

(2.4) Lemme. *Soit $f=(f_1,\dots,f_n)$ une application analytique d'un voisinage de zéro de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ telle que $(\inf)^{-1}(0)=\{0\}$. Alors f est finie à zéro et $l_0(f)=\max_{i=1}^{n}(\operatorname{ord} f_i)$.*

Démonstration de (2.4). Notons d'abord que pour toute application analitique finie à zéro $f=(f_1,\dots,f_n)$ on a $l_0(f)\geqslant \max_{i=1}^{n}(\operatorname{ord}_0 f_i)$. En effet on vériefie comme dans la preuve de (2.3) que pour toute fonction holomorphe g on a $l_0(f)\geqslant \dfrac{\operatorname{ord}(g\circ f)}{\operatorname{ord} g}$. En posant $g(w)=w_i$ pour $i=1,\dots,n$ nous obtenons l'inégalité demandée. Supposons maintenant que $(\inf)^{-1}(0)=0$. Il suffit alors de vérifier que f est finie à zéro et que $l_0(f)\leqslant \max_{i=1}^{n}(\operatorname{ord} f_i)$. Considérons le cas où $\operatorname{ord} f_1=\dots=\operatorname{ord} f_n=k>1$. On a alors $|\inf(z)|\geqslant(\min\{|\inf(z')|:|z'|=1\})\,|z|^k$ pour $z\in\mathbf{C}^n$ et $\operatorname{ord}(f-\inf)>k=l_0(\inf)$. D'après (1.4) f est finie à zéro et $l_0(f)=k$. Dans le cas général posons $\tilde f=(f_1^{p_1},\dots,f_n^{p_n})$ où $p_1\operatorname{ord} f_1=\dots=p_n\operatorname{ord} f_n=\operatorname{ord} f_1\dots\operatorname{ord} f_n$. D'après le raisonnement précédent $\tilde f$ est finie à zéro et $l_0(\tilde f)=\operatorname{ord} f_1\dots\operatorname{ord} f_n$ ce qui entraîne que f est finie à zéro et $l_0(f)\leqslant \dfrac{l_0(\tilde f)}{\min_{i=1}^{n}(p_i)}=\max_{i=1}^{n}(\operatorname{ord} f_i)$.

Démonstration de la proposition (2.2). Posons $h(z)=(z_1^{d_1},\dots,z_n^{d_n})$, on a alors $\operatorname{ord}(f_i\circ h)=o_d(f_i)$ pour $i=1,\dots,n$ et $\operatorname{in}(f\circ h)=\operatorname{in}_d(f)\circ h$. En appliquant (2.4) à l'application $f\circ h$ nous obtenons $l_0(f\circ h)=\max_{i=1}^{n}(o_d(f_i))$. La proposition découle maintenant du lemme (2.3) car $l_0(h)=\max_{i=1}^{n}(d_i)$, $\operatorname{ord}(h)=\min_{i=1}^{n}(d_i)$.

(2.5) Exemple. Calculons $m_0(f)$ et $l_0(f)$ pour l'application $f:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ donnée par la formule $f(z_1,z_2)=(z_1^{a+1}+z_2^a,\ z_1^{N-b}z_2^b)$ où $0<b<a<N$. A cet effet posons $d=(a,a+1)$, on a alors $o_d(f_1)=a(a+1)$, $o_d(f_2)=Na+b$ et $\inf=f$. Evidemment $(\operatorname{in}_d f)^{-1}(0)=\{0\}$ alors d'après (2.1) on a $m_0(f)=\dfrac{a(a+1)(Na+b)}{a(a+1)}=Na+b$ et (2.2) implique $l_0(f)\leqslant\dfrac{\max(a(a+1),Na+b)}{\min(a,a+1)}=N+\dfrac{b}{a}$. D'autre part l'inégalité $l_0(f)\geqslant\dfrac{m_0(f)}{\operatorname{ord} f}$ (cf. [7], Proposition 1.3) donne $l_0(f)\geqslant N+\dfrac{b}{a}$ alors $l_0(f)=N+\dfrac{b}{a}$.

(2.6) Example (cf. [3, 5]). Si le polynôme $P(z_1,z_2)=\sum_{i_1p_1+i_2p_2=p}a_{i_1i_2}z_1^{i_1}z_2^{i_2}$ à singularité isolée (i.e. $(\operatorname{grad} P)^{-1}(0)=\{0\}$) n'est pas un monôme alors $l_0(\operatorname{grad} P)=\max\left(\dfrac{p}{p_1},\dfrac{p}{p_2}\right)-1$. En effet l'evaluation $l_0(\operatorname{grad} P)\leqslant\max\left(\dfrac{p}{p_i}\right)-1$

est une consequence directe de (2.2). Pour montrer l'égalité il suffit de comparer $\operatorname{ord}_t(\operatorname{grad} P(z(t)))$ et $\operatorname{ord}_t z(t)$ pour $z(t) = (c_1 t^{p_1}, c_2 t^{p_2})$ avec $(c_1, c_2) \in \mathbf{C}^2$ convenablement choisi.

Notons L_n ensemble d'exposants $l_0(f)$ où f parcourt les applications analytiques finis à $0 \in \mathbf{C}^n$. Le théorème (1.1) et l'exemple (2.5) montrent que $L_2 = \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{2}{3}, 4\frac{1}{2}, 4\frac{2}{3}, 5, \ldots\}$.

Question. Quelle est la condition necessaire et suffisante pour que le nombre rationnel $\frac{p}{q}$ appartienne à L_n pour $n > 2$?

INSTITUT DE MECANIQUE APPLIQUEE, POLYTECHNIQUE, AL. TYSIĄCLECIA PAŃSTWA POLSKIEGO, 25-314 KIELCE
(INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ, POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA)

OUVRAGES CITÉS

[1] V. Y. Arnold, A. N. Varuchenko, S. M. Gusein-Zade, *Osobennosti diferentsiruemykh otobrazhenii*, Moscow, 1982.

[2] J. D. Angelo, *Real hypersurfaces, orders of contacts and applications*, Annales of Math., **115** (1982), 615–637.

[3] T. C. Kuo, Y-Ch. Lu, *On analytic function germs of two complex variables*, Topology, **16** (1977), 299–310.

[4] M. Lejeune-Jalambert, B. Teissier, *Cloture integral des idéaux et équisingularité*, Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 1974.

[5] B. Lichtin, *Estimation of Łojasiewicz exponents and Newton polygons*, Investiones math., **64** (1981) 417–429.

[6] A. Płoski, *Une évaluation pour les sous-ensembles analytiques complexes*, Bull. Pol. Ac.: Math., **31** (1983), 259–262.

[7] A. Płoski, *Sur l'exposant d'une application analytique. I*, ibid., (à paraître).

[8] K. Rusek, T. Winiarski, *Polynomial automorphisms of* $\mathbf{C}^n$. Univer. Lag. Acta Math., **24** (1984), 143–149.

[9] T. Winiarski, *Total number of intersection of locally analytic sets*, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw 1981, preprint No. 248.

А. Плоски, **О показателе аналитического отображения**

Пусть $l_0(f)$ — показатель Лоясевича конечнократного комплексного отображения пространства $\subset \mathbf{C}^n$. В работе доказывается, что $l_0(f) = N + \frac{b}{a}$, где $0 < b < a < N^{n-1}$ целые числа или $l_0(f) = N$ целое число.