Aspects des Singularités
http://www-gat.univ-lille1.fr
/~tibar/Aspects/index.htm

Semestre de Singularité à Lille
École : "Singularités d'Applications Différentielles"
31 mai au 6 juin 1999

Les solutions formelles et convergentes des équations analytiques.

par

Arkadiusz PŁOSKI

Ce cours est consacré à la présentation du théorème d'approximation d'Artin [5]. Nous déduisons ce théorème d'un résultat obtenu par l'auteur [6]. La méthode de démonstration est dûe à M. Artin et s'avère utile dans des contextes différents [8]. Nous avons voulu rendre la démonstration aussi élémentaire que possible en suivant le principe que la bonne preuve d'un théorème doit être au même niveau de difficulté que son énoncé. Pour des résultats plus sophistiqués, nous renvoyons le lecteur à l'article de Teissier [7].

J'exprime mes vifs remerciements à Anne-Marie Chollet et Vincent Thilliez qui m'ont invité à participer à l'École "Singularités d'applications différentiables" et qui ont créé une atmosphère à la fois scientifique et chaleureuse. Je tiens aussi à remercier Augustin Mouze qui a transcrit ce texte.

L'ÉNONCÉ

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notons $\mathbb{K}[[X]] = \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]]$ l'anneau des séries formelles en $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Pour toute série $f = f(X)$ de $\mathbb{K}[[X]]$, nous noterons $f(0)$ le terme constant de f et $\mathrm{ord}(f)$ l'ordre de f. La série f est donc un élément inversible de l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$ si et seulement si $f(0) \neq 0$. Tous les éléments non inversibles forment l'idéal maximal $\underline{m}_n = \underline{m}_{\mathbb{K}[[X]]}$. L'idéal $\underline{m}_n$ est engendré par les variables $X_1, \ldots, X_n$. Alors f appartient à $\underline{m}_n^c$, où c est un entier non nul, si et seulement si $\mathrm{ord}(f)$ est supérieur ou égal à c ou encore si et seulement si toutes les dérivées d'ordre strictement inférieur à c sont sans terme constant. De plus, si $g_1, \ldots, g_n$ sont des séries sans terme constant de $\mathbb{K}[[Y]] = \mathbb{K}[[Y_1, \ldots, Y_m]]$, alors la série $f(g_1(Y), \ldots, g_n(Y))$ obtenue par la substitution de $g_1(Y), \ldots, g_n(Y)$ à $X_1, \ldots, X_n$ est définie. L'application qui à tout élément f de $\mathbb{K}[[X]]$ associe $f(g_1, \ldots, g_n)$ de $\mathbb{K}[[Y]]$ est l'unique homomorphisme qui envoie X_i, pour tout $i = 1, \ldots, n$, sur $g_i(Y)$. Notons enfin $\mathbb{K}\{X\}$ le sous-anneau de $\mathbb{K}[[X]]$ formé par les séries convergentes. C'est aussi un anneau local. Rappelons que si f appartient à $\mathbb{K}\{X\}$ et $g_1, \ldots, g_n$ appartiennent à $\mathbb{K}\{Y\}$, avec $g_1(0) = \ldots = g_n(0) = 0$, alors $f(g_1, \ldots, g_n)$ appartient à $\mathbb{K}\{Y\}$. Nous utiliserons aussi, dans $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathbb{K}\{X\}$, les théorèmes de préparation et de division de Weierstrass et le théorème des fonctions implicites. Pour une présentation plus détaillée de ces anneaux, on pourra consulter [1], [2], [3] et [4].

Soient m, n, N des entiers positifs, $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_N)$ des variables et

$$f(X, Y) = (f_1(X, Y), \ldots, f_m(X, Y)) \in \mathbb{K}\{X, Y\}^m$$

une suite de séries convergentes sans terme constant (nous écrirons $f(0, 0) = 0$ ce qui veut dire $f_i(0, 0) = 0$ pour $i = 1, \cdots, n$). Nous avons le théorème d'approximation d'Artin :

THÉORÈME 1. (Artin 1968) [5] On suppose qu'il existe une suite de séries formelles $\bar{y}(X) = (\bar{y}_1(X), \ldots, \bar{y}_N(X))$, $\bar{y}(0) = 0$, telle que $f(X, \bar{y}(X)) = 0$ (dans $\mathbb{K}[[X]]$). Alors, pour tout entier $c \geq 1$, il existe une suite de séries convergentes $y(X) = (y_1(X), \ldots, y_N(X))$, $y(0) = 0$, telle que $f(X, y(X)) = 0$ et $y_\nu(X) \equiv \bar{y}_\nu(X) \bmod(\underline{m}_n^c)$ pour $\nu = 1, \ldots, N$.

Grosso modo, les solutions convergentes sont denses parmi les solutions formelles pour la topologie $\underline{m}_n$-adique de $\mathbb{K}[[X]]$.

Observons que $y_\nu(X) \equiv \bar{y}_\nu(X) \bmod(\underline{m}_n^c)$, où c est un entier strictement positif, si et seulement si toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $c-1$ inclus de $y_\nu(X) - \bar{y}_\nu(X)$ sont nulles à l'origine.

Pour illustrer le théorème d'Artin, nous donnons quelques corollaires.

COROLLAIRE 1. Le système d'équations $f(X, Y) = 0$ a un nombre fini de solutions formelles si et seulement si toute solution formelle est convergente.

COROLLAIRE 2. Soit $f(X, Y) \in \mathbb{K}\{X, Y\}$, $f(X, Y) \neq 0$, une série où Y est une variable scalaire. Si $f(X, \bar{y}(X)) = 0$, avec $\bar{y}(X) \in \mathbb{K}[[X]]$, $\bar{y}(0) = 0$, alors $\bar{y}(X) \in \mathbb{K}\{X\}$.

COROLLAIRE 3. Si une série $f \in \mathbb{K}\{X\}$ est irréductible dans $\mathbb{K}\{X\}$, alors elle est irréductible dans $\mathbb{K}[[X]]$.

Nous déduirons le théorème d'Artin du résultat suivant :

THÉORÈME 2. (Płoski 1974) [6] Avec les notations et hypothèses du théorème d'Artin, il existe une suite de séries convergentes $Y(X, t) = (Y_1(X, t), \ldots, Y_N(X, t))$ appartenant à $\mathbb{K}\{X, t\}^N$, $Y(0, 0) = 0$, avec $t = (t_1, \ldots, t_s)$ des nouvelles variables, $s \geq 0$, et une suite de séries formelles $\bar{t}(X) = (\bar{t}_1(X), \ldots, \bar{t}_s(X))$ de $\mathbb{K}[[X]]^s$, $\bar{t}(0) = 0$, telles que $f(X, Y(X, t)) = 0$ et $\bar{y}(X) = Y(X, \bar{t}(X))$.

On remarque facilement que le théorème 2 entraine le théorème 1. Étant donné un entier $c > 0$, il suffit de choisir des séries convergentes $t(X) = (t_1(X), \ldots, t_s(X))$, telles que $\bar{t}_\nu(X) \equiv t_\nu(X) \bmod(\underline{m}_n^c)$ pour $\nu = 1, \ldots, s$. On a alors la congruence $Y_\nu(X, \bar{t}(X)) \equiv Y_\nu(X, t(X)) \bmod(\underline{m}_n^c)$ pour $\nu = 1, \ldots, N$ et si on pose $y(X) = Y(X, t(X))$, on a $\bar{y}_\nu(X) \equiv \bar{y}_\nu(X) \bmod(\underline{m}_n^c)$ pour $\nu = 1, \ldots, N$.

<u>Remarque</u> Notons que pour tout idéal $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}[[Y]]$, si on a $g_i(Y) \equiv g_i^*(Y) \bmod(\mathcal{I})$, pour tout $i = 1, \ldots, n$, où g_i, g_i^* sont des séries sans terme constant, alors on a aussi $f(g_1(Y), \ldots, g_n(Y)) \equiv f(g_1^*(Y), \ldots, g_n^*(Y)) \bmod(\mathcal{I})$, pour toute série $f = f(X_1, \ldots, X_n)$.

LA RÉDUCTION AU CAS D'UNE SOLUTION SIMPLE

En gardant les notations introduites ci-dessus, nous dirons alors qu'une suite $\bar{y}(X) = (\bar{y}_1(X), \cdots, \bar{y}_N(X))$ de $\mathbb{K}[[X]]^q$, $\bar{y}(0) = 0$, est une solution simple du système $f(X, Y) = 0$ si et seulement si $f(X, \bar{y}(X)) = 0$ et $\mathrm{rang}(\frac{\partial f_i}{\partial y_\nu}(X, \bar{y}(X)))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq \nu \leq N}} = m$. On a, dans ce cas, $m \leq N$.

Nous allons réduire la démonstration du théorème 2 au cas d'une solution simple. Notre outil est la proposition suivante :

PROPOSITION. Soit $\mathcal{I} \neq (0)$, un idéal premier de l'anneau $\mathbb{K}\{X\}$, $X = (X_1, \cdots, X_n)$. Il existe des séries $h_1, \cdots, h_r$, de $\mathbb{K}\{X\}$, appartenant à $\mathcal{I}$, telles que

$$\operatorname{rang}(\frac{\partial h_i}{\partial X_j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} (\operatorname{mod} \mathcal{I}) = r,$$

$$\forall\, h \in \mathcal{I},\ \exists a \notin \mathcal{I}, \text{ telle que } ah \in (h_1, \cdots, h_r)\mathbb{K}\{X\}.$$

Avant de démontrer la proposition, notons qu'elle est invariante par rapport aux substitutions linéaires. Si ϕ est un automorphisme de $\mathbb{K}\{X\}$ défini par

$$\phi(f(X_1, \ldots, X_n)) = f(\sum_{j=1}^{n} c_{1,j}X_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} c_{n,j}X_j),$$

avec $\det(c_{i,j}) \neq 0$, alors la proposition est vraie pour $\mathcal{I}$ si et seulement si elle est vraie pour $\phi(\mathcal{I})$.

Preuve de la proposition. Nous effectuons une récurrence sur le nombre n de variables $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Si $n = 1$, alors $\mathcal{I} = (X_1)$, $h_1(X) = X_1$ et c'est clair. Supposons alors $n > 1$ et la proposition vraie pour les idéaux premiers de l'anneau de $n-1$ variables. Grâce à la remarque ci-dessus, nous pouvons supposer que l'idéal $\mathcal{I}$ contient une série régulière par rapport à la variable X_n. Alors, par le théorème de préparation de Weierstrass, $\mathcal{I}$ contient un polynôme distingué

$$W(X', X_n) = X_n^k + \sum_{j=1}^{k} r_j(X')X_n^{k-j},\ k > 0,$$

où $X' = (X_1, \ldots, X_{n-1})$. Posons alors $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cap \mathbb{K}\{X'\}$. Considérons l'ensemble $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}'[X_n]$. Évidemment le polynôme distingué $W(X', X_n)$ appartient à $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}'[X_n]$. Soit

$$h_1(X', X_n) = c_0(X')X_n^l + c_1(X')X_n^{l-1} + \ldots + c_l(X'),$$

le polynôme en X_n de degré minimal l, $l \geq 0$, appartenant à $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}'[X_n]$. Puisque le degré $l \geq 0$ est minimal, on a

$$l > 0,$$
$$c_0(X') \notin \mathcal{I}',$$
$$\frac{\partial h_1}{\partial X_n} \notin \mathcal{I}.$$

Nous affirmons alors que, pour toute série h appartenant à $\mathcal{I}$, il existe une entier $p \geq 0$ tel que

$$(*) \qquad c_0(X')^p h(X', X_n) = Q_1(X', X_n)h_1(X', X_n) + R_1(X', X_n)$$

dans $\mathbb{K}\{X\}$, avec $R_1 \in \mathcal{I}'[X_n]$. En effet, par le théorème de division de Weierstrass, on a

$$h(X', X_d) = Q(X)(X', X_n)W(X', X_n) + R(X', X_n),$$

avec $R(X', X_n)$ un polynôme en X_n de degré strictement inférieur à k. En divisant alors les polynômes $W(X', X_n)$, $R(X', X_n)$ de $\mathbb{K}\{X'\}[X_n]$ par le polynôme $h_1(X', X_n)$, selon la division euclidienne classique dans $\mathbb{K}\{X'\}[X_n]$, nous pouvons écrire $(*)$ avec $R_1 \in \mathbb{K}\{X'\}[X_n]$ de degré strictement inférieur à l. Alors tous les coefficients de R_1 sont (par définition de h_1) dans $\mathcal{I}'$, c'est à dire $R_1(X', X_d) \in \mathcal{I}'[X_n]$. Si $\mathcal{I}' = (0)$, alors $R_1(X', X_n) = 0$ et $(*)$ démontre la proposition. Sinon par l'hypothèse de récurrence, il existe des séries $h_2, \cdots, h_r$ de $\mathcal{I}'$, telles que $\text{rang}(\frac{\partial h_i}{\partial X_j})_{\substack{2\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq n-1}} \pmod{\mathcal{I}'} = r-1$. En outre, toujours en utilisant l'hypothèse de récurrence appliquée aux coefficients de R_1, il existe une série $b(X')$, n'appartennant pas à $\mathcal{I}'$, telle que $b(X')R_1(X', X_n)$ appartient à $(h_2, \cdots, h_r)\mathbb{K}\{X'\}$. De plus, en utilisant $(*)$, on obtient

$$c_0(X')^p b(X')h(X', X_n) = b(X')Q_1(X', X_n)h_1(X', X_n) + b(X')R_1(X', X_n) \in (h_1, \ldots, h_r).$$

Évidemment, $c_0(X')^p a(X')$ n'appartient pas à $\mathcal{I}$. Il suffit donc de poser $a = c_0(X')^p b(X')$, car si

$$\frac{\partial(h_2, \ldots, h_r)}{\partial(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{r-1}})} \notin \mathcal{I}',$$

alors

$$\frac{\partial(h_1, \ldots, h_r)}{\partial(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{r-1}}, X_n)} = \frac{\partial h_1}{\partial X_n}\frac{\partial(h_2, \cdots, h_r)}{\partial(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{r-1}})} \notin \mathcal{I}.$$

Nous pouvons maintenant vérifier

LEMME 1. *Soient $f(X,Y) = (f_1(X,Y), \ldots, f_m(X,Y)) \in \mathbb{K}\{X,Y\}^m$, $f(X,Y) \neq 0$ dans $\mathbb{K}\{X,Y\}^m$, des séries convergentes telles qu'il existe des séries formelles, $\bar{y}(X) = (\bar{y}_1(X), \ldots, \bar{y}_q(X))$, $\bar{y}(0) = 0$, telles que $f(X, \bar{y}(X)) = 0$. Alors, il existe des séries convergentes $h(X,Y) = (h_1(X,Y), \ldots, h_r(X,Y))$ de $\mathbb{K}\{X,Y\}^r$ telles que*

(i) $$h_i(X, \bar{y}(X)) = 0, \text{ pour tout } i = 1, \cdots, r,$$

(ii) $$\text{rang}(\frac{\partial h_i}{\partial Y_\nu}(X, \bar{y}(X)))_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq \nu\leq N}} = r,$$

(iii) S'il existe des séries $Y(X,t) = (Y_1(X,t), \ldots, Y_N(X,t))$, $Y(0,0) = 0$, et $\bar{t}(X) = (\bar{t}_1(X), \ldots, \bar{t}_s(X))$, $\bar{t}(0) = 0$, telles que $h(X, Y(X,t)) = 0$ et $\bar{y}(X) = Y(X, \bar{t}(X))$ alors $f(X, Y(X,t)) = 0$.

Preuve. Considérons l'idéal premier

$$\mathcal{I} = \{g(X,Y) \in \mathbb{K}\{X,Y\} : g(X, \bar{y}(X)) = 0\}.$$

De manière évidente, $f_1(X,Y),\dots,f_m(X,Y)$ appartiennent à $\mathcal{I}$ ainsi $\mathcal{I}\neq(0)$. D'après la proposition, il existe des séries $h_1(X,Y),\dots,h_r(X,Y)$, de $\mathcal{I}$, telles que

$$\operatorname{rang}\Big(\frac{\partial(h_1,\dots,h_r)}{\partial(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_N)}(X,\bar{y}(X))\Big)=r,$$

$$\forall\ g\in\mathcal{I},\ \exists a\notin\mathcal{I},\ a\in\mathbb{K}\{X,Y\},\ \text{telle que } a(X,Y)g(X,Y)\in(h_1,\cdots,h_r)\mathbb{K}\{X,Y\}.$$

Nous affirmons que $h_1,\dots,h_r$ ont les propriétés (i), (ii) et (iii). L'assertion (i) est satisfaite puisque $h_1,\dots,h_r$ appartiennent à $\mathcal{I}$. Pour vérifier (ii), il suffit d 'observer

$$\operatorname{rang}\Big(\frac{\partial(h_1,\dots,h_r)}{\partial(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_N)}(X,\bar{y}(X))\Big)=\operatorname{rang}\Big(\frac{\partial(h_1,\dots,h_r)}{\partial(Y_1,\dots,Y_N)}(X,\bar{y}(X))\Big).$$

En effet les relations, pour tout $i=1,\cdots,r$, $h_i(X,\bar{Y}(X))=0$ impliquent

$$\frac{\partial h_i}{\partial X_j}(X,\bar{y}(X))+\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial h_i}{\partial Y_\nu}(X,\bar{y}(X))\frac{\partial\bar{y}_\nu}{\partial X_j}=0,\ \text{ pour } j=1,\cdots,n.$$

Pour vérifier (iii), nous écrivons

$$a_i(X,Y)f_i(X,Y)=\sum_{k=1}^{r}a_{i,k}(X,Y)h_k(X,Y),$$

avec, pour tout $i=1,\dots,m$, $a_i(X,Y)\neq 0$. Alors $a_i(X,Y(X,t))\neq 0$ puisque $\bar{y}(X)=Y(X,\bar{t}(X))$ et (iii) suit.

THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES D'APRÈS BOURBAKI-TOUGERON [9] [10]

Soient $f(X,Y)=(f_1(X,Y),\dots,f_m(X,Y))$ des séries convergentes en les variables $X=(X_1,\dots,X_n)$ et $Y=(Y_1,\dots,Y_N)$. Supposons $m\leq N$ et notons $J(X,Y)$ la matrice

$$J(X,Y)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial Y_\nu}(X,Y)\right]_{\substack{i=1,\cdots,m;\\ \nu=N-m+1,\cdots,N}},$$

$$\delta(X,Y)=\det(J(X,Y)).$$

On note aussi $M(X,Y)$ la transposée de la matrice des cofacteurs de $J(X,Y)$. On a ainsi

$$M(X,Y)J(X,Y)=J(X,Y)M(X,Y)=\delta(X,Y)I_m,$$

où I_m est la matrice identité m lignes, m colonnes. Soit la suite de séries convergentes $g(X,Y)=(g_1(X,Y),\dots,g_m(X,Y))$ définies par

$$\begin{bmatrix} g_1(X,Y)\\ \vdots\\ g_m(X,Y)\end{bmatrix}=M(X,Y)\begin{bmatrix} f_1(X,Y)\\ \vdots\\ f_m(X,Y)\end{bmatrix}$$

Remarques : On a donc

$$g_i(X,Y) \in (f_1(X,Y),\dots,f_m(X,Y)) \text{ pour } i=1,\dots,m,$$

$$\delta(X,Y)f_i(X,Y) \in (g_1(X,Y),\dots,g_m(X,Y)) \text{ pour } i=1,\dots,m.$$

THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES (de Bourbaki-Tougeron) [9] [10].

Supposons qu'il existe une suite de séries sans terme constant, $y^0(X)=(y_1^0(X),\dots,y_q^0(X))$, de $\mathbb{K}\{X\}^N$, $y^0(0)=0$, telle que, pour tout $i=1,\dots,m$,

$$g_i(X,y^0(X)) \equiv 0 \bmod (\delta(X,y^0(X))^2\underline{m}_n).$$

Soient $t=(t_1,\dots,t_{N-m})$ des variables. On pose, pour tout $\nu=1,\dots,N-m$,

$$Y_\nu(X,t)=y_\nu^0(X)+\delta(X,y^0(X))^2t_\nu.$$

Il existe alors une unique suite de séries $(Y_{N-m+1}(X,t),\dots,Y_N(X,t))$, de $\mathbb{K}\{X,t\}$, sans terme constant, (unicité dans l'anneau $\mathbb{K}[[X,t]]$), telle que

$$f_i(X,Y(X,t))=0 \text{ pour } i=1,\dots,m,$$

$$Y_\nu(X,t)\equiv y_\nu^0(X) \bmod (\delta(X,y^0(X))\underline{m}_n) \text{ pour } \nu=N-m+1,\dots,N.$$

Remarques

- Nous dirons que $\bar{y}^0(X)=(\bar{y}_1^0(X),\dots,\bar{y}_N^0(X))$ est une solution approchée (au sens Bourbaki-Tougeron) du système d'équations $f(X,Y)=0$ et que la suite de séries $Y(X,t)=(Y_1(X,t),\dots,Y_N(X,t))$ est une solution à paramètres déterminée par la solution approchée $\bar{y}^0(X)$. Il est aussi facile de voir qu'on a l'équivalence suivante :
soit $y(X)=(y_1(X),\dots,y_q(X))$, $y(0)=0$, une suite de séries formelles. Alors, on a $y(X)=Y(X,t(X))$ pour une suite de séries formelles $t(X)=(t_1(X),\dots,t_{N-m}(X))$, $t(0)=0$, si et seulement si

$$\begin{cases} f(X,y(X))=0 \\ y_\nu(X)\equiv y_\nu^0(X) \bmod (\delta(X,y^0(X))^2\underline{m}_n) \text{ pour } \nu=1,\dots,N-m \\ y_\nu(X)\equiv y_\nu^0(X) \bmod (\delta(X,y^0(X))\underline{m}_n) \text{ pour } \nu=N-m+1,\dots,N \end{cases}$$

On dira alors que la solution $y(X)=Y(X,t(X))$ est associée à la solution approchée $y^0(X)$. Ainsi les solutions associées à $y^0(X)$ sont décrites sans recourir à la notion de solutions à paramètres déterminées par $y^0(X)$.

- Dans la suite, nous utiliserons la formule de Taylor sous la forme suivante. Soient $v=(v_1,\dots,v_N)$, $h=(h_1,\dots,h_N)$ des variables. Pour toute suite $(f_1(X,Y),\dots,f_m(X,Y))$

de séries formelles, on a alors

$$(Ta)\qquad \begin{bmatrix} f_1(X,v+h) \\ \vdots \\ f_m(X,v+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(X,v) \\ \vdots \\ f_m(X,v) \end{bmatrix} + \frac{J(f_1,\cdots,f_m)}{J(Y_1,\cdots,Y_{N-m})}(X,v)\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{N-m} \end{bmatrix} + J(X,v)\begin{bmatrix} h_{N-m+1} \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1(X,v,h) \\ \vdots \\ P_m(X,v,h) \end{bmatrix},$$

où, pour tout $i = 1,\cdots,m$, $P_i(X,v,h) \in (h_1,\ldots,h_q)^2$.

Preuve du théorème de Bourbaki-Tougeron. Soient $u = (u_{N-m+1},\cdots,u_N)$ des variables. On pose, pour tout $i = 1,\cdots,m$,

$$\begin{aligned} F_i(X,t,u) = f_i\Big(& X, y_1^0(X) + \delta(X,y^0(X))^2 t_1,\ldots, y_{N-m}^0(X) + \delta(X,y^0(X))^2 t_{N-m}, \\ & y_{N-m+1}^0(X) + \delta(X,y^0(X))u_{N-m+1},\ldots, y_N^0(X) + \delta(X,y^0(X))u_N\Big). \end{aligned}$$

En appliquant alors à $f(X,Y)$ la formule de Taylor (Ta) avec,

pour tout $i = 1,\ldots,N$, $v_i = y_i^0(X)$,

pour tout $i = 1,\ldots,N-m$, $h_i = \delta(X,y^0(X))^2 t_i$ et,

pour tout $i = N-m+1,\ldots,N$, $h_i = \delta(X,y^0(X))u_i$,

on obtient

$$(1)\qquad \begin{aligned} \begin{bmatrix} F_1(X,t,u) \\ \vdots \\ F_m(X,t,u) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} f_1(X,y^0(X)) \\ \vdots \\ f_m(X,y^0(X)) \end{bmatrix} \\ & +\delta(X,y^0(X))^2 \frac{J(f_1,\ldots,f_m)}{J(Y_1,\ldots,Y_{N-m})}(X,y^0(X)) \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{N-m} \end{bmatrix} \\ & +\delta(X,y^0(X))J(X,y^0(X)) \begin{bmatrix} u_{N-m+1} \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \\ & +\delta(X,y^0(X))^2 \begin{bmatrix} Q_1(X,t,u) \\ \vdots \\ Q_m(X,t,u) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $Q_i(X,t,u) \in (t,u)^2$. En multipliant l'égalité (1) par $M(X,y^0(X))$, on obtient, puisque, d'une part, on a $M(X,y^0(X))J(X,y^0(X)) = \delta(X,y^0(X))I_m$, et d'autre part, on a aussi $g_i(X,Y^0(X)) \equiv 0 \bmod(\delta(X,y^0(X))^2\underline{m}_n)$, pour $i = 1,\ldots,m$,

$$(2)\qquad M(X,y^0(X)) \begin{bmatrix} F_1(X,t,u) \\ \vdots \\ F_m(X,t,u) \end{bmatrix} = \delta(X,y^0(X))^2 \begin{bmatrix} G_1(X,t,u) \\ \vdots \\ G_m(X,t,u) \end{bmatrix},$$

où $G_i(X,t,u)$ sont des séries convergentes avec $G_i(0,0,0)=0$. En outre, en différentiant l'égalité (2), on obtient

$$M(X,y^0(X))\frac{J(F_1,\dots,F_m)}{J(u_{N-m+1},\dots,u_N)}(X,t,u)=\delta(X,y^0(X))^2\frac{J(G_1,\dots,G_m)}{J(u_{N-m+1},\dots,u_N)}(X,t,u).$$

Il est alors facile de vérifier les assertions suivantes

$$\det(\frac{J(F_1,\dots,F_m)}{J(u_{N-m+1},\dots,u_N)})(X,0,0)=\det(\frac{J(f_1,\dots,f_m)}{J(Y_{N-m+1},\dots,u_N)})(X,y^0(X))\delta(X,y^0(X))^m,$$

$$\det(M(X,y^0(X)))=\delta(X,y^0(X))^{m-1}.$$

D'autre part, on a

$$\det(\frac{J(F_1,\dots,F_m)}{J(u_{N-m+1},\dots,u_N)})(X,0,0)=\delta(X,y^0(X))^{m+1},$$

$$\det(\frac{J(G_1,\dots,G_m)}{J(u_{N-m+1},\dots,u_N)})(X,0,0)=1,$$

d'où, en particulier,

$$\det(\frac{J(G_1,\dots,G_m)}{J(u_{N-m+1},\dots,u_N)})(0,0,0)=1.$$

On obtient alors le théorème en appliquant le théorème classique des fonctions implicites dans $\mathbb{K}\{X,t,u\}$, au vecteur $G(X,t,u)$, par rapport à la variable u et autour du point $(0,0,0)$. On trouve donc une suite $u(X,t)=(u_{N-m+1}(X,t),\dots,u_N(X,t))$, de séries convergentes telle que

$$G(X,t,u(X,t))=0 \text{ et } u(0,0)=0.$$

On en déduit, pour tout $i=1,\dots,m$,

$$F_i(X,t,u(X,t))=0 \text{ et } u(0,0)=0.$$

On obtient ainsi le résultat voulu avec, pour tout $\nu=N-m+1,\dots,N$,

$$Y_\nu(X,t)=y^0_\nu(X)+\delta(X,y^0(X))u(X,t).$$

ÉTUDE DES SOLUTIONS APPROCHÉES

On conserve les notations introduites au paragraphe précédent. On a alors

LEMME 2. Soit $\bar{y}(X)=(\bar{y}_1(X),\dots,\bar{y}_N(X))$, $\bar{y}(0)=0$, une solution formelle du système $f(X,Y)=0$, $m\le N$, telle que que la série $\delta(X,\bar{y}(X))$ est X_n-régulière d'ordre strictement positif. Il existe alors une solution approchée (au sens Bourbaki-Tougeron), $\bar{v}(X)=(\bar{v}_1(X),\dots,\bar{v}_N(X))$, de $\mathbb{K}[[X']][X_n]^N$, $\bar{v}(0)=0$, du système $f(X,Y)=0$, telle que $\bar{y}(X)$ est une solution associée à la solution $\bar{v}(X)$, c'est à dire

$$\bar{y}_\nu(X)\equiv\bar{v}_\nu(X) \bmod (\delta(X,\bar{v}(X))^2\underline{m}_n) \text{ pour } \nu=1,\dots,N-m,$$

$$\bar{y}_\nu(X) \equiv \bar{v}_\nu(X) \bmod (\delta(X,\bar{v}(X))\underline{m}_n) \text{ pour } \nu = N-m+1,\ldots,N.$$

Remarque

- On a $\delta(X,\bar{y}(X)) \equiv \delta(X,\bar{v}(X)) \operatorname{mod}(\delta(X,\bar{v}(X))\underline{m}_n)$, par conséquent $\delta(X,\bar{v}(X))$ est X_n-régulière d'ordre strictement positif.

Preuve du lemme 2. Posons $p = \operatorname{ord}(\delta(0,X_n,\bar{y}(0,X_n))$, alors $\delta(X,\bar{y}(X))$ est X_n-régulière d'ordre p. En vertu du théorème de préparation de Weierstrass, on a

$$(1) \qquad \delta(X,\bar{y}(X)) = (X_n^p + \sum_{j=1}^{p} \bar{a}_j(X')X_n^{p-j}).\text{unité},$$

avec $\bar{a}_j(X')$ des séries formelles sans terme constant. Par le théorème de division pour les séries formelles, on peut écrire, d'une part,

$$(2) \qquad \bar{y}_\nu(X) = \sum_{j=0}^{2p-1} \bar{v}_{\nu,j}(X')X_n^j + \bar{a}(X)^2(c_\nu + \bar{t}_\nu(X)),$$

où $c_\nu \in \mathbb{K}$ et $\bar{t}_\nu(0) = 0$ pour $\nu = 1,\ldots,N-m$, et d'autre part,

$$(3) \qquad \bar{y}_\nu(X) = \sum_{j=0}^{p-1} \bar{v}_{\nu,j}(X')X_n^j + \bar{a}(X)(c_\nu + \bar{u}_\nu(X)),$$

où $c_\nu \in \mathbb{K}$ et $\bar{u}_\nu(0) = 0$ pour $\nu = N-m+1,\ldots,N$. Posons $\bar{t}(X) = (\bar{t}_1(X),\ldots,\bar{t}_{N-m}(X))$, $\bar{u}(X) = (\bar{u}_{N-m+1}(X),\ldots,\bar{u}_N(X))$ et

$$\bar{v}_\nu(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{2p-1} \bar{v}_{\nu,j}(X')X_n^j + \bar{a}(X)^2 c_\nu \text{ pour } \nu = 1,\ldots,N-m \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \bar{v}_{\nu,j}(X')X_n^j + \bar{a}(X)c_\nu \text{ pour } \nu = N-m+1,\ldots,N \end{cases}$$

Par construction, $\bar{v}_\nu(X)$ appartient à $\mathbb{K}[[X']][X_n]$ pour $\nu = 1,\ldots,N$.

Propriété 1 : $\delta(X,\bar{v}(X)) = \bar{a}(X).\text{unité}$.

Preuve. On a, pour tout $\nu = 1,\ldots,N$,

$$\bar{y}_\nu(X) \equiv \bar{v}_\nu(X) \bmod (\bar{a}(X)\underline{m}_n).$$

On a donc, puisque la composition ne modifie pas la congruence modulo un idéal,

$$\delta(X,\bar{y}(X)) \equiv \delta(X,\bar{v}(X)) \bmod (\bar{a}(X)\underline{m}_n),$$

ce qui donne le résultat car $\delta(X,\bar{y}(X)) = \bar{a}(X).\text{unité}$.

Propriété 2 : $g_i(X,\bar{v}(X)) \equiv 0 \bmod (\bar{a}(X)^2\underline{m}_n)$ pour tout $i = 1,\ldots,m$.

Preuve. On pose, pour tout $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned}\bar{f}_i(X,t,u) &= f_i\Big(X, \bar{v}_1(X) + \bar{a}(X)^2 t_1, \ldots, \bar{v}_{N-m}(X) + \bar{a}(X)^2 t_{N-m}, \\ &\qquad \bar{v}_{N-m+1}(X) + \bar{a}(X) u_{N-m+1}, \ldots, \bar{v}_N(X) + \bar{a}(X) u_N\Big).\end{aligned}$$

On a donc $\bar{f}(X, \bar{t}(X), \bar{u}(X)) = f(X, \bar{y}(X)) = 0$. En appliquant alors à $f(X,Y)$ la formule de Taylor (Ta) avec,

pour tout $i = 1, \ldots, N$, $v_i = \bar{v}_i(X)$,
pour tout $i = 1, \ldots, N-m$, $h_i = \bar{a}(X)^2 t_i$ et,
pour tout $i = N-m+1, \ldots, N$, $h_i = \bar{a}(X) u_i$,
on obtient

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \bar{f}_1(X,t,u) \\ \vdots \\ \bar{f}_m(X,t,u) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(X,\bar{v}(X)) \\ \vdots \\ f_m(X,\bar{v}(X)) \end{bmatrix} + \bar{a}(X)^2 \frac{J(f_1,\ldots,f_m)}{J(Y_1,\ldots,Y_{N-m})}(X,\bar{v}(X)) \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{N-m} \end{bmatrix} \\ &+ \bar{a}(X) J(X,\bar{v}(X)) \begin{bmatrix} u_{N-m+1} \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} + \bar{a}(X)^2 \begin{bmatrix} \bar{Q}_1(X,t,u) \\ \vdots \\ \bar{Q}_m(X,t,u) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

avec $\bar{Q}_i(X,t,u) \in (t,u)^2$ pour $i = 1, \ldots, m$. En multipliant alors la dernière égalité par $M(X, \bar{v}(X))$, puis en remplaçant t par $\bar{t}(X)$ et u par $\bar{u}(X)$, on obtient

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(X,\bar{v}(X)) \\ \vdots \\ g_m(X,\bar{v}(X)) \end{bmatrix} + \bar{a}(X)^2 \mathrm{Mat}(X),$$

avec $\mathrm{Mat}(X)$ une matrice de séries en X sans terme constant. La propriété 2 découle de cette dernière égalité. Les propriétés 1 et 2 entrainent immédiatement le fait que $\bar{v}(X)$ est une solution approchée du système $f(X,Y) = 0$. Le reste provient des définitions de $\bar{v}(X)$.

LEMME 3. Soient $f(X,Y) = (f_1(X,Y), \ldots, f_m(X,Y))$ des éléments de $\mathbb{K}\{X,Y\}^m$, $\delta(X,Y) = \det \dfrac{J(f_1,\ldots,f_m)}{J(Y_{N-m+1},\ldots,Y_n)}$. Soient aussi $V^0 = (V^0_{\nu,j})$, des variables, pour $\nu = 1, \ldots, N$, $j = 0, \cdots, D$, avec D un entier non nul. Soit enfin $c^0 = (c^0_{\nu,j})$ des constantes, pour $\nu = 1, \ldots, N$, $j = 0, \cdots, D$, avec $c^0_{\nu,0} = 0$ pour $\nu = 1, \ldots, N$. Supposons

$$\operatorname{ord}\left(\delta(0, X_n, \sum_{j=0}^{D} c^0_{1,j} X_n^j, \ldots, \sum_{j=0}^{D} c^0_{N,j} X_n^j)\right) = p, \ 0 < p < +\infty.$$

Alors, il existe une suite $F(X', V^0) = (F_1(X', V^0), \cdots, F_M(X', V^0))$ de $(\mathbb{K}\{X', V\})^M$, telle que, pour toute famille de séries $\{\bar{V}^0_{\nu,j}(X')\}$, on ait l'équivalence

(i) $\left(\sum_{j=0}^D (c^0_{1,j} + \bar{V}^0_{1,j}(X')) X_n^j, \ldots, \sum_{j=0}^D (c^0_{N,j} + \bar{V}^0_{N,j}(X')) X_n^j\right)$ est une solution approchée de $f(X,Y) = 0$,

(ii) $$F(X', \{\bar{V}^0_{\nu,j}(X')\}) = 0$$

Preuve. On pose, pour $\nu = 1, \dots, N$,

$$v_\nu(X_n) = \sum_{j=0}^{D} \left(c^0_{\nu,j} + V^0_{\nu,j}\right) X_n^j,$$

$$v(X_n) = (v_1(X_n), \dots, v_N(X_n)).$$

On voit aisément que $\delta(X, v(X_n))$ est X_n-régulière d'ordre p. Par le théorème de division, on a alors, pour $i = 1, \dots, m$,

$$g_i(X, v(X_n)) = Q_i(X, V^0)\delta(X, v(X_n))^2 + \sum_{j=0}^{2p-1} R_{i,j}(X', V^0) X_n^j. \tag{1}$$

Si $\bar{v}(X) = (\bar{v}_1(X), \dots, \bar{v}_N(X))$ où $\bar{v}_\nu(X) = \sum_{j=0}^{D} \left(c^0_{\nu,j} + \bar{V}^0_{\nu,j}(X')\right) X_n^j$, avec des séries $\bar{V}^0_{\nu,j}(X')$ sans terme constant, on obtient l'identité de division

$$g_i(X, \bar{v}(X)) = Q_i(X, \bar{v}(X))\delta(X, \bar{v}(X))^2 + \sum_{j=0}^{2p-1} R_{i,j}(X', \{\bar{V}^0_{\nu,j}(X')\}) X_n^j.$$

On rappelle que $\bar{v}(X)$ est une solution approchée du système $f(X, Y) = 0$ si et seulement si, pour tout $i = 1, \dots, m$, $g_i(X, \bar{v}(X)) \equiv 0$ modulo $\delta(X, \bar{v}(X))^2 \underline{m}_n$. Ainsi, on a alors le fait que $\bar{v}(X)$ est une solution approchée du système $f(X, Y) = 0$ si et seulement si, pour tout $i = 1, \dots, m$, pour tout $j = 0, \dots, 2p - 1$, $R_{i,j}(X', \{\bar{V}^0_{\nu,j}(X')\}) = 0$ et $Q_i(0, 0) = 0$. Ceci démontre le lemme 3.

DÉMONSTRATION (par récurrence sur le nombre de variables X)

Pour $n = 0$, le théorème est trivial. On suppose donc $n \geq 1$ et le théorème vrai pour $n - 1$. Grâce au lemme, on peut supposer que $\bar{y}(X)$ est une solution simple du système $f(X, Y) = 0$. On pose

$$\delta(X, Y) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_\nu}(X, Y) \right)_{\substack{i=1,\dots,m, \\ \nu=N-m+1,\dots,N}}.$$

Sans diminuer la généralité, on peut alors supposer que $\delta(X, \bar{y}(X)) \neq 0$. Si $\delta(0, 0)$ est non nul, le théorème est une conséquence du théorème des fonctions implicites. On suppose alors $\delta(0, 0) = 0$. Après un éventuel changement de variables linéaire, on peut en outre supposer que la série $\delta(X, \bar{y}(X))$ est X_n-régulière d'ordre $p > 0$. En vertu du lemme 2, le système $f(X, Y) = 0$ possède une solution approchée $\bar{v}(X) = (\bar{v}_1(X), \dots, \bar{v}_N(X))$ de $(\mathbb{K}[[X']][X_d])^N$, $\bar{v}(0) = 0$, telle que la solution formelle $\bar{y}(X)$ est associée à $\bar{v}(X)$. On écrit alors

$$\bar{v}_\nu(X) = \sum_{j=0}^{D} \left(c^0_{\nu,j} + \bar{V}^0_{\nu,j}(X')\right) X_n^j,$$

avec $D > 0$ un entier et $\bar{V}^0_{\nu,j}(X')$ des séries formelles sans terme constant. On a aussi

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}\Big(\delta(0, X_n, \textstyle\sum_{j=0}^{D} c^0_{1,j}X^j_n, \dots, \sum_{j=0}^{D} c^0_{N,j}X^j_n)\Big) &= \operatorname{ord}(\delta(0, X_n, \bar{v}(0, X_n)) \\ &= \operatorname{ord}(\delta(0, X_n, \bar{y}(0, X_n)) \\ &= p,\end{aligned}$$

puisque $\delta(X, \bar{v}(X)) = \delta(X, \bar{y}(X))$.unité. D'après le lemme 3, il existe des séries convergentes $F(X', \{V^0_{\nu,j}\})$ telles que

$$F(X', \{\bar{V}^0_{\nu,j}(X')\}) = 0.$$

En appliquant alors l'hypothèse de récurrence, on trouve des séries $\{V^0_{\nu,j}(X', s)\}$ convergentes, de variables $X' = (X_1, \dots, X_{n-1})$ et $s = (s_1, \cdots, s_q)$, telles que $\bar{V}^0_{\nu,j}(X') = V^0_{\nu,j}(X', \bar{s}(X'))$, avec $\bar{s}(X') = (\bar{s}_1(X'), \dots, \bar{s}_q(X'))$, $\bar{s}(0) = 0$ et telles qu'on ait l'égalité $F(X', \{V^0_{\nu,j}(X', s)\}) = 0$. Les relations ci-dessus impliquent encore une fois par le lemme 3 que la suite de séries $v(X, s) = (v_1(X, s), \dots, v_q(X, s))$, avec, pour tout $\nu = 1, \dots, N$,

$$v_q(X, s) = \sum_{j=0}^{D} \Big(c^0_{\nu,j} + \bar{V}^0_{\nu,j}(X', s)\Big)X^j_n,$$

est une solution approchée du système $f(X, Y) = 0$. De plus, on a $\bar{v}(X) = v(X, \bar{s}(X'))$. Le théorème de Bourbaki-Tougeron implique alors l'existence d'une solution à paramètres $Y(X, s, t)$, déterminée par la solution approchée $v(X, s)$, donnée par les formules

$$Y_\nu(X, s, t) = v_\nu(X, s) + \delta(X, v(X, s))^2 t_\nu \text{ pour } \nu = 1, \dots, N - m,$$

$$Y_\nu(X, s, t) = v_\nu(X, s) + \delta(X, v(X, s))u_\nu(X, s, t) \text{ pour } \nu = N - m + 1, \dots, N.$$

Ainsi

$$Y_\nu(X, \bar{s}(X'), t) = \bar{v}_\nu(X) + \delta(X, \bar{v}_\nu(X))^2 t_\nu \text{ pour } \nu = 1, \dots, N - m,$$

$$Y_\nu(X, \bar{s}(X'), t) = \bar{v}_\nu(X) + \delta(X, \bar{v}_\nu(X))u_\nu(X, \bar{s}(X'), t) \text{ pour } \nu = N - m + 1, \dots, N,$$

est une solution à paramètres déterminée par $\bar{v}(X)$. La solution $\bar{y}(X)$ est associée à $\bar{v}(X)$. Il existe donc des séries $\bar{t}(X)$, $\bar{t}(0) = 0$, telles que $Y(X, \bar{s}(X'), \bar{t}(X)) = \bar{y}(X)$.

BIBLIOGRAPHIE

Séries formelles et convergentes, théorème de division, théorème de préparation de Weierstrass, théorème des fonctions implicites

[1] H. Cartan *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann (1961).

[2] A. Chenciner *Courbes algébriques planes.* Publications Mathématiques de l'Université Paris VII (1978)1.

[3] S. Lefschetz *Algebraic geometry.* Princeton (1953).

[4] 0. Zariski & P. Samuel *Commutative Algebra.* Vol. II, Princeton (1959-1961).

Approximation d'Artin

[5] M. Artin *On the solutions of analytic equations.* Invent. Math. 5 (1968), 277-291

[6] A. Płoski *Note on a theorem of M.Artin.* Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Math. 22 (1974), 1107-1109.

[7] B. Teissier *Résultats récents sur l'approximation des morphismes en algèbre commutative d'après André, Artin, Popescu et Spivakovsky.* Séminaire Bourbaki, 16ème année (1993-1994), 259-281.

[8] J.J. Wavrik *A theorem on solutions of analytic equations with applications to deformations of complex structures.* Math. Ann., 216 (1975), 127-142.

Théorème des fonctions implicites de Bourbaki-Tougeron

[9] N. Bourbaki *Algèbre commutative.* Fasc. XXVIII (1961), Chap. 3.

[10] J. C. Tougeron *Idéaux de fonctions différentiables.* Springer Verlag, Berlin (1972).

Arkadiusz Płoski,
Department of Mathematics, Technical University,
Al. 1000LPP7, 25-314 Kielce, Poland
e-mail : matap@tu.kielce.pl