BULLETIN OF THE POLISH
ACADEMY OF SCIENCES
MATHEMATICS
Vol. 33, No. 11–12, 1985

Remarque sur la multiplicité d'intersection des branches planes

par

Arkadiusz PŁOSKI

Présenté par S. ŁOJASIEWICZ le 14 juin 1985

Summary. Let $f, g, h \in \mathbf{C}\{x, y\}$ be irreducible power series. Then in the sequence

$$\frac{m_0(f, g)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} g}, \frac{m_0(f, h)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} h}, \frac{m_0(g, h)}{\operatorname{ord} g \operatorname{ord} h}$$

there are two terms equal and the third is not less than the equal terms. Here $m_0(f, g)$ denotes the intersection multiplicity of the branches $f = 0$, $g = 0$ and $\operatorname{ord} f$ stands for the order of f.

1. Soit $\mathbf{C}\{x, y\}$ l'anneau des séries convergentes de deux variables x, y à coefficients complexes. Par le mot "branche" nous designons une série irréductible de $\mathbf{C}\{x, y\}$. Notons $m_0(f, g)$ la multiplicité d'intersection de deux branches f et g (alors $m_0(f, g) = +\infty$ si f, g sont associées dans $\mathbf{C}\{x, y\}$), $\operatorname{ord} f$ l'ordre de la série f. Le lemme cité ci-dessous est bien connu.

(1.1) LEMME. *Soient f, g deux branches. Alors* $\dfrac{m_0(f, g)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} g} \geqslant 1$, *avec égalité si et seulement si f et g n'ont pas de tangente commune.*

Le but de cette note est de démontrer le suivant.

(1.2). THÉORÈME. *Soient f, g, h des branches. Alors dans la suite*

$$\frac{m_0(f, g)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} g}, \frac{m_0(f, h)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} h}, \frac{m_0(g, h)}{\operatorname{ord} g \operatorname{ord} h}$$

il y a deux termes égaux et le troisième n'est pas strictement moins que les termes égaux.

Evidemment, le théorème (1.2) peut être présenté de la façon suivante:

$$\frac{m_0(f,g)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} g} \geqslant \inf\left(\frac{m_0(f,h)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} h}, \frac{m_0(g,h)}{\operatorname{ord} g \operatorname{ord} h}\right), \text{ avec égalité si}$$

$$\frac{m_0(f,h)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} h} \neq \frac{m_0(g,h)}{\operatorname{ord} g \operatorname{ord} h}$$

La démonstration de (1.2) nous donnerons à la fin de cette note, maintenant nous présentons une conséquence du théorème. Dans ce but notons $l_0(f,g)$ l'exposant de Łojasiewicz de l'application analytique $z \to (f(z), g(z))$ d'un voisinage de zéro de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{C}^2$ (cf. [4]). La caractérisation de l'exposant à l'aide des arcs analytiques (cf. [2]) nous permet d'écrire

$$l_0(f,g) = \sup\left\{\min\left(\frac{m_0(f,h)}{\operatorname{ord} h}, \frac{m_0(g,h)}{\operatorname{ord} h}\right): h \in \mathbf{C}\{x,y\} \quad \text{irréductible}\right\}.$$

En appliquant (1.2) à la formule ci-dessus nous obtenons:

(1.3) Corollaire. *Si $f, g \in \mathbf{C}\{x,y\}$ sont irréductibles, alors*

$$l_0(f,g) = \frac{m_0(f,g)}{\min(\operatorname{ord} f, \operatorname{ord} g)}.$$

2. Dans cette section nous rappelons la formule classique pour la multiplicité d'intersection des branches planes (cf. [1], pp. 504–567). Nous dirons que la branche $f \in \mathbf{C}\{x,y\}$ est y-regulière si f est un polynôme distingué pas rapport à la variable y, irréductible et tel que $\operatorname{ord}(f - y^{\operatorname{ord} f}) > \operatorname{ord} f$. Si f y-regulière d'ordre p alors d'après le théorème de Puiseux on a:

$$f(x,y) = \prod_{u^p=1} \left(y - y\left(ux^{\frac{1}{p}}\right)\right) \quad \text{où} \quad y\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant M} a_i x^{\frac{p_i}{p}} \in \mathbf{C}\{x^{\frac{1}{p}}\}.$$

Nous écrivons le développement de Puiseux en mettant en évidence le support de $y(x^{\frac{1}{p}})$ i.e. $a_i \neq 0$ et $p_{i-1} < p_i$ $(p_0 = p)$ pour $1 \leqslant i \leqslant M \leqslant +\infty$. Notons $N(f) = M$, $e_i(f) = \frac{p_i}{p_0}$, $d_i(f) = \frac{1}{p_0} pgcd(p_0, \ldots, p_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant M$.

Si g est une autre branche y-regulière d'ordre q alors

$$g(x,y) = \prod_{v^q=1} \left(y - \bar{y}\left(vx^{\frac{1}{q}}\right)\right) \quad \text{où} \quad \bar{y}\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} b_j x^{\frac{q_j}{q}} \in \mathbf{C}\{x^{\frac{1}{q}}\}.$$

Nous avons donc $N(g) = N$, $e_i(g) = \frac{q_i}{q_0}$ $(q_0 = q)$ pour $0 \leqslant i \leqslant N$. Posons $s_0\left(y(x^{\frac{1}{p}}), \bar{y}(x^{\frac{1}{q}})\right) = \min\{i: a_i x^{\frac{p_i}{p}} \neq b_i x^{\frac{q_i}{q}}\}$ s'il existe $i \leqslant \min(M,N)$ tel que

$a_i x^{\frac{p_i}{p}} \neq b_i x^{\frac{q_i}{q}}$. Dans le cas contraire nous posons, par définition, $s_0\left(y\left(x^{\frac{1}{p}}\right), \bar{y}\left(x^{\frac{1}{q}}\right)\right) = \min(M, N)+1$.

(2.1) DÉFINITION. Si f, g sont deux branches distinctes y-regulières alors $s_0(f, g) = \max\left(s_0\left(y\left(ux^{\frac{1}{p}}\right), y\left(vx^{\frac{1}{q}}\right)\right): u^p = 1,\ v^q = 1\right)$.

On a $s_0(f, g) = \max\left(s_0\left(y\left(ux^{\frac{1}{p}}\right), \bar{y}\left(x^{\frac{1}{q}}\right)\right): u^p = 1\right) = \max\left(s_0\left(y\left(x^{\frac{1}{p}}\right), \bar{y}\left(vx^{\frac{1}{q}}\right)\right): v^q = 1\right)$ ce qui permet de vérifier facilement le lemme suivant:

(2.2) LEMME. *Si f, g, h sont des branches y-regulières deux a deux distinctes, alors dans la suite $s_0(f, g)$, $s_0(f, h)$, $s_0(g, h)$ il y a deux termes égaux et le troisième n'est pas strictement moins que les termes égaux.*

(2.3) THÉORÈME (cf. [1, 5]). *Soient f, g deux branches distinctes y-regulières. Posons $s_0(f, g) = s+1$. Nous convenons que $e_{s+1}(f) = +\infty$ $\left(e_{s+1}(g) = +\infty\right)$ si $s = N(f) < +\infty$ $\left(si\ s = N(g) < +\infty\right)$ et que la somme d'une famille vide est égale à zéro. Alors*

$$\frac{m_0(f, g)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} g} = \sum_{i=1}^{s} \left(d_{i-1}(f) - d_i(f)\right) e_i(f) + d_s(f) \min\left(e_{s+1}(f), e_{s+1}(g)\right).$$

Une autre version du théorème (2.3) est donnée dans [3].

(2.4) REMARQUE. Si $s_0(f, g) = s+1$ alors $e_i(f) = e_i(g)$ pour $0 \leqslant i \leqslant s$ d'où on obtient par récurrence $d_i(f) = d_i(g)$ pour $0 \leqslant i \leqslant s$. Notons pour abréger

$$c_s(f) = \sum_{i=1}^{s} \left(d_{i-1}(f) - d_i(f)\right) e_i(f).$$

Par conséquent, si $s_0(f, g) = s+1$ alors $c_s(f) = c_s(g)$.

3. Passons à la démonstration du théorème (1.2). Si deux branches dans la suite f, g, h n'ont pas de tangente commune alors (1.2) est une conséquence immediate du lemme (1.1). Supposons alors que les branches f, g, h ont la tangente commune qui, apres un éventuel changement de variables, est d'équation $y = 0$. Grâce au théorème de préparation de Weierstrass nous pouvons nous borner au cas où f, g, h sont y-regulières. En vertu du lemme (2.2) il suffit de considérer les branches f, g, h y-regulières telles que $s_0(f, h) = s_0(g, h) \leqslant s_0(f, g)$. Notons $s_0(f, g) = s+1$ et distinguons deux cas.

a) $s_0(f, h) = s_0(g, h) = s_0(f, g) = s+1$.

D'après (2.3) nous avons:

$$\frac{m_0(f,g)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} g} = c_s(f)+d_s(f)\min\big(e_{s+1}(f), e_{s+1}(g)\big),$$

$$\frac{m_0(f,h)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} h} = c_s(f)+d_s(f)\min\big(e_{s+1}(f), e_{s+1}(h)\big).$$

On a $c_s(g) = c_s(f)$ et $d_s(g) = d_s(f)$ car $s_0(f,g) = s+1$ ce qui nous permet d'écrire en vertu de (2.3):

$$\frac{m_0(g,h)}{\operatorname{ord} g \operatorname{ord} h} = c_s(f)+d_s(f)\min\big(e_{s+1}(g), e_{s+1}(h)\big).$$

Alors dans le cas a) le théorème (1.2) est évident.

b) $s_0(f,h) = s_0(g,h) < s_0(f,g) = s+1$.

Posons $s_0(f,h) = s_0(g,h) = t+1$. Nous avons, d'après (2.3)

$$\frac{m_0(f,h)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} h} = c_t(f)+d_t(f)\min\big(e_{t+1}(f), e_{t+1}(h)\big) =$$

$$= c_t(g)+d_t(g)\min\big(e_{t+1}(g), e_{t+1}(h)\big) = \frac{m_0(g,h)}{\operatorname{ord} g \operatorname{ord} h}$$

car $e_i(f) = e_i(g)$, $d_i(f) = d_i(g)$ pour $0 \leqslant i \leqslant t+1$ puisque $t+1 \leqslant s$. Il suffit alors de vérifier l'inégalité $\dfrac{m_0(f,h)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} h} \leqslant \dfrac{m_0(f,g)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} g}$. Posons pour abréger $m = \min\big(e_{s+1}(f), e_{s+1}(g)\big)$, $n = \min\big(e_{t+1}(f), e_{t+1}(h)\big)$. On a donc $n \leqslant e_{t+1}(f) \leqslant m$ (l'inégalité $e_{t+1}(f) \leqslant m$ résulte du fait que $e_{t+1}(f) = e_{t+1}(g) \leqslant e_{s+1}(g)$). Maintenant, d'après (2.3) on a:

$$\frac{m_0(f,g)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} g} - \frac{m_0(f,h)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} h} = \sum_{i=t+1}^{s}\big(d_{i-1}(f)-d_i(f)\big)e_i(f)+d_s(f)\,m-$$

$$-d_t(f)\,n \geqslant \big(d_t(f)-d_s(f)\big)e_{t+1}(f)+d_s(f)\,m-d_t(f)\,n =$$

$$= d_t(f)\big(e_{t+1}(f)-n\big)+d_s(f)\big(m-e_{t+1}(f)\big) \geqslant 0$$

ce qui démontre le théorème (2.1).

INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE, POLYTÉCHNIQUE, AL. TYSIĄCLECIA PAŃSTWA POLSKIEGO, 25-314 KIELCE

(INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ, POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA)

OUVRAGES CITÉS

[1] C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, Tome Premier, Paris, 1893.

[2] M. Lejeune-Jalambert, B. Teissier, *Cloture integrale des idéaux et equisingularité*, Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, 1974.

[3] M. Merle, *Invariants polaires des courbes planes*, Inventiones math., **41** (1977), 103–111.

[4] A. Płoski, *Une évaluation pour les sous-ensembles analytiques complexes*, Bull. Pol. Ac.: Math., **31** (1983), 259–262.

[5] B. L. van der Waerden, *Einführung in die algebraische Geometrie*, Berlin, 1939.

А. Плоски, **Заметка о кратности пересечения плоских ветвей**

Пусть $f, g, h \in \mathbf{C}\{x, y\}$ неприводимые ряды. Тогда в последовательности

$$\frac{m_0(f, g)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} g}, \frac{m_0(f, h)}{\operatorname{ord} f \operatorname{ord} h}, \frac{m_0(g, h)}{\operatorname{ord} g \operatorname{ord} h},$$

два члена равны, а третий не меньше остальных. Мы обозначили $m_0(f, g)$—кратность пересечения ветвей $f=0, g=0$ и $\operatorname{ord} f$—порядок ряда f.