BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sciences mathématiques
Vol. XXVIII, No. 3—4, 1980

Une démonstration du théorème des zéros pour les séries convergentes

par

Arkadiusz PŁOSKI

Présenté par S. ŁOJASIEWICZ le 4 juin, 1979

Summary. A simplified proof of Rückert's Nullstellensatz is given.

1. Soient K un corps valué, complet et algébriquement clos, $K\{X\}$ l'anneau des séries convergentes de variables $X=(X_1, ..., X_n)$ à coefficients dans K. Pour toute série F de $K\{X\}$ et pour tout $x=(x_1, ..., x_n)\in K^n$ appartenant au domaine de convergence de la série F notons $F(x)$ la valeur de F au point x.

Le but de cette note est de donner une nouvelle démonstration du théorème ci-dessous.

1.1. *Soient $F_1, ..., F_m$, G des séries convergentes de $K\{X\}$ et supposons qu'il existe un idéal premier J tel que $F_1, ..., F_m \in J$ et $G\notin J$. Alors pour tout voisinage de zéro U dans K^n il existe $x\in U$ tel que $F_1(x)=...=F_m(x)=0$ et $G(x)\neq 0$.*

Dans tout anneau commutatif avec unité le nilradical d'un idéal est l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent ([2], chap. I, théorème 2.3).

Le théorème des zéros ([1], chap V, théorème 30.2) résulte donc de (1.1) car l'hypothèse du théorème (1.1) est équivalente à celle-ci: la série G n'appartient pas au nilradical de l'idéal engendré par les séries $F_1, ..., F_m$.

Notre démonstration du théorème (1.1) répose sur le théorème de division pour les séries convergentes ([1], chap. II, théorème 10.3) et sur deux lemmes élémentaires que nous présentons ci-dessous.

2. Soient A un anneau commutatif avec unité, T une variable. On note $\deg(F)$ le degré, $c(F)$ le coefficient directeur du polynôme F de $A[T]$. Pour tout idéal I de $A[T]$ on note $I_0=(I\cap A)A[T]$; alors $I_0\subset I$ et $I_0=I$ si, et seulement si, I est un idéal engendré par des éléments de l'anneau A.

2.1. LEMME. *Supposons que $I\neq I_0$ et soit $H\in I\setminus I_0$ un polynôme de degré minimum. Alors* $\deg(H)>0$, *$c(H)\notin I$ et pour tout $F\in I$ il existe un entier N tel que*

$$c(H)^N F\equiv R \pmod H \text{ avec } R\in I_0,\ \deg(R)<\deg(H).$$

Ce lemme se demontre aisément en effectuant la division de F par H.

2.2. LEMME. *Soit I un idéal premier de $A[T]$ tel que $I \neq I_0$. Alors, pour tout $G \notin I$ il existe un polynôme G_1 tel que $GG_1 \equiv a \pmod{I}$ avec $a \in A \setminus I$.*

Démonstration. Soient $G \notin I$, et P un des polynômes de $(I+(G)A[T]) \setminus I_0$ pour lesquels l'entier $\deg(P)$ est minimum. Il s'agit de montrer que $\deg(P)=0$. Par suite du choix de P on a: $c(P) \notin I$, $0 \leqslant \deg(P) \leqslant \deg(H)$; et $P \notin I$ puisque $G \notin I$. Par division euclidienne, on peut écrire $c(P)^M H = QP + S$ avec $M \geqslant 1$ et $\deg(S) < \deg(P)$. En outre, on peut supposer Q choisi de sorte qu'on a $\deg(Q) \leqslant \deg(H) - \deg(P)$. On a: $Q \notin I_0$ car $c(QP) = c(P)^M c(H)$ et $P \notin I_0$.

D'autre part: $S = c(P)^M H - QP \in I + (G)A[T]$, et $\deg(S) < \deg(P)$; donc $S \in I_0$. Cela entraîne que $QP = c(P)^M H - S \in I$, d'où $Q \in I$ puisque $P \notin I$. Comme $Q \in I \setminus I_0$ on a bien $\deg(Q) \geqslant \deg(H)$ ce qui, joint à l'inégalité $\deg(Q) \leqslant \deg(H) - \deg(P)$ donne $\deg(P)=0$, terminant la démonstration de (2.2).

3. La démonstration du théorème (1.1) se fait par récurrence sur le nombre n des variables X. Si $n=1$ il suffit de prendre $x_1=0$, soit alors $n>1$ et supposons le théorème vrai pour $n-1$.

Soient maintenant $F_1, \ldots, F_m$ des séries appartenant à un idéal premier J de $K\{X\}$, et G une série non située dans J.

Le cas $F_1 = \ldots = F_m \equiv 0$ étant trivial, on peut supposer $F(0, X_n) \neq 0$ dans $K\{X_n\}$, car on peut se ramener à ce cas au moyen d'un changement des variables X. Grâce au théorème de préparation de Weierstrass on peut supposer que F_1 est un polynôme distingué en X_n.

De plus, en remplaçant les séries $F_2, \ldots, F_m$, G par les restes de division par le polynôme distingué F_1, on peut se borner au cas ou $F_2, \ldots, F_m$, G sont des polynômes en X_n. Posons $X' = (X_1, \ldots, X_{n-1})$, $I = J \cap K\{X'\}[X_n]$, $I' = I \cap K\{X'\}$. Il est évident que $F_1, \ldots, F_m \in I$, $G \notin I$ et que les lemmes (2.1), (2.2) s'appliquent à l'idéal I.

Soient $H(X'; X_n) \in I \setminus I' K\{X'\}[X_n]$ un polynôme de degré minimum et $c(X') = c_{X_n}(H(X'; X_n))$. En vertu du lemme (2.2) on a:

$$G(X'; X_n)\, G_1(X'; X_n) \equiv a(X') \pmod{I}$$

avec $G_1(X'; X_n)$ dans $K\{X'\}[X_n]$ et $a(X') \notin I'$.

D'après le lemme (2.1) appliqué aux polynômes $F_1(X'; X_n)', \ldots, F_m(X'; X_n)$, $G(X'; X_n)\, G_1(X'; X_n) - a(X')$ on a:

$$(*) \quad \begin{aligned} &c(X')^{N_i} F_i(X'; X_n) = Q_i(X'; X_n)\, H(X'; X_n) + R_i(X'; X_n), \text{ pour } i=1, \ldots, m \\ &c(X')^N \big(G(X', X_n)\, G_1(X'; X_n) - a(X')\big) = Q_{m+1}(X'; X_n)\, H(X', X_n) + R_{m+1}(X'; X_n) \end{aligned}$$

avec $c(X')\, a(X') \notin I'$ et les coéfficients des polynômes $R_i(X'; X_n)$ dans I'. Soit U un voisinage de zéro dans K^n. Choisissons un voisinage de zéro U' dans K^{n-1} et un voisinage de zéro U'' dans K tels que l'on ait: a) $U' \times U'' \subset U$, b) les coéfficients des polynômes $R_i(X'; X_n)$, $Q_i(X'; X_n)$, ... sont convergents dans U', c) si $(x', x_n) \in U' \times K$ et $F_1(x', x_n) = 0$ alors $(x', x_n) \in U' \times U''$.

Par hypothèse de récurrence appliquée a l'idéal I', à la série $c(X)'a(X') \notin I'$ et aux coéfficients des séries $R_i(X'; X_n)$, il existe $x' \in U'$ tel que l'on ait: $R_i(x' : X_n) \equiv 0$ pour $i=1, \ldots, m+1$ et $c(x')a(x') \neq 0$. Comme $c(x') \neq 0$, le polynôme $H(x'; x_n)$ est de degré positif; alors il existe $x_n \in K$ tel que $H(x'; x_n)=0$. Compte tenu des relations $(*)$ et des conditions a), b), et c) on a $x=(x', x_n) \in U$ et $F_1(x)=\ldots=F_m(x)=0$, $G(x) \neq 0$ ce qui termine la démonstration.

INSTITUT DES MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ MARIE CURIE-SKŁODOWSKA, NOWOTKI 8, 20-03 LUBLIN
(INSTYTUT MATEMATYKI, UMCS)

OUVRAGES CITÉS

[1] S. S. Abhyankar, *Local analytic geometry*, New York–London, 1964.
[2] M. Nagata, *Local rings*, Huntington, New York, 1975.

А. Плоски, **Одно доказательство теоремы о корнях сходящихся рядов**

Содержание. В статье дается простое доказательство теоремы о корнях Рюккерта.