Funciones numéricas de ideales graduados

Yuriko Pitones

Centro de Investigación en Matemáticas, CIMAT-México

Seminario GASIULL
Universidad de la Laguna
Abril 2021

Contenido

Contenido

Contenido

- $R = K[x_1, ..., x_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$.
- $I \neq (0)$ un ideal graduado de R.
- $R/I = \{\bar{f} = f + I \mid f \in R\}$

- $R = K[x_1, ..., x_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$.
- $I \neq (0)$ un ideal graduado de R.
- $R/I = \{\bar{f} = f + I \mid f \in R\}$

Función de HIlbert de R/I , $H_I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$H_I(d) := dim_K R_d/I_d.$$
$$I_d = R_d \cap I$$

- $R = K[x_1, ..., x_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$.
- $I \neq (0)$ un ideal graduado de R.
- $R/I = \{\bar{f} = f + I \mid f \in R\}$

Función de HIbert de R/I , $H_I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$H_I(d) := dim_K R_d / I_d.$$
$$I_d = R_d \cap I$$

Hilbert Series of S/I

$$Hilb_{S/I}(t) = \sum_{i \geq 0} \dim_{\mathbb{K}}(S_i/I_i)t^i.$$

Teorema de Hilbert-Serre

Polinomio de Euler

$$Hilb_{R/I}(t) = \frac{h(t)}{(1-t)^{k-1}}$$

Teorema de Hilbert-Serre

Polinomio de Euler

$$Hilb_{R/I}(t) = \frac{h(t)}{(1-t)^{k-1}}$$

Definición

El grado o multiplicidad: R/I

$$e(R/I) = h(1)$$

Ejemplo (fácil)

- $S = K[x, y, z]/(x^2, xy^2, y^3)$

Ejemplo (fácil)

- $S = K[x, y, z]/(x^2, xy^2, y^3)$
  base de S_0 :

Ejemplo (fácil)

- $S = K[x, y, z]/(x^2, xy^2, y^3)$
  base de S_0 : $\{1\}$

Ejemplo (fácil)

- $S = K[x, y, z]/(x^2, xy^2, y^3)$
  base de S_0 : $\{1\}$
  base de S_1 :

Ejemplo (fácil)

- $S = K[x, y, z]/(x^2, xy^2, y^3)$

base de S_0 :	$\{1\}$
base de S_1 :	$\{x, y, z\}$

Ejemplo (fácil)

- $S = K[x, y, z]/(x^2, xy^2, y^3)$

  base de S_0 : $\{1\}$

  base de S_1 : $\{x, y, z\}$

  base de S_2 :

Ejemplo (fácil)

- $S = K[x, y, z]/(x^2, xy^2, y^3)$

$$\begin{array}{ll} \text{base de } S_0 : & \{1\} \\ \text{base de } S_1 : & \{x, y, z\} \\ \text{base de } S_2 : & \{xy, xz, y^2, yz, z^2\} \end{array}$$

Ejemplo (fácil)

- $S = K[x, y, z]/(x^2, xy^2, y^3)$

$$
\begin{array}{lc}
\text{base de } S_0: & \{1\} \\
\text{base de } S_1: & \{x, y, z\} \\
\text{base de } S_2: & \{xy, xz, y^2, yz, z^2\} \\
\text{base de } S_3: & \{xyz, xz^2, yz^2, y^2z, z^3\} \\
\text{base de } S_4: & \{xyz^2, xz^3, yz^3, y^2z^2, z^4\} \\
\text{base de } S_5: & \{xyz^3, xz^4, yz^4, y^2z^3, z^5\}
\end{array}
$$

Ejemplo (fácil)

- $S = K[x,y,z]/(x^2, xy^2, y^3)$

$$
\begin{array}{rcl}
\text{base de } S_0: & \{1\} & \\
\text{base de } S_1: & \{x, y, z\} & \\
\text{base de } S_2: & \{xy, xz, y^2, yz, z^2\} & \\
\text{base de } S_3: & \{xyz, xz^2, yz^2, y^2z, z^3\} & \\
\text{base de } S_4: & \{xyz^2, xz^3, yz^3, y^2z^2, z^4\} & \\
\text{base de } S_5: & \{xyz^3, xz^4, yz^4, y^2z^3, z^5\} & \\
\vdots & \vdots & \\
\text{base de } S_i: & \{xyz^{i-2}, xz^{i-1}, yz^{i-1}, y^2z^{i-2}, z^i\} & \text{para } i \geq 3
\end{array}
$$

Ejemplo (fácil)

- $S = K[x,y,z]/(x^2, xy^2, y^3)$

$$\begin{array}{rc}
\text{base de } S_0 : & \{1\} \\
\text{base de } S_1 : & \{x, y, z\} \\
\text{base de } S_2 : & \{xy, xz, y^2, yz, z^2\} \\
\text{base de } S_3 : & \{xyz, xz^2, yz^2, y^2z, z^3\} \\
\text{base de } S_4 : & \{xyz^2, xz^3, yz^3, y^2z^2, z^4\} \\
\text{base de } S_5 : & \{xyz^3, xz^4, yz^4, y^2z^3, z^5\} \\
\vdots & \vdots \\
\text{base de } S_i : & \{xyz^{i-2}, xz^{i-1}, yz^{i-1}, y^2z^{i-2}, z^i\} \quad \text{para } i \geq 3
\end{array}$$

- Serie de Hilbert de S

$$Hilb_S(t) = 1 + 3t + 5t^2 + 5t^3 + 5t^4 + 5t^5 + \cdots = \frac{1+2t+2t^2}{1-t}$$

Ejemplo (fácil)

- $S = K[x,y,z]/(x^2, xy^2, y^3)$

$$\begin{array}{rcl}
\text{base de } S_0: & \{1\} & \\
\text{base de } S_1: & \{x,y,z\} & \\
\text{base de } S_2: & \{xy, xz, y^2, yz, z^2\} & \\
\text{base de } S_3: & \{xyz, xz^2, yz^2, y^2z, z^3\} & \\
\text{base de } S_4: & \{xyz^2, xz^3, yz^3, y^2z^2, z^4\} & \\
\text{base de } S_5: & \{xyz^3, xz^4, yz^4, y^2z^3, z^5\} & \\
\vdots & \vdots & \\
\text{base de } S_i: & \{xyz^{i-2}, xz^{i-1}, yz^{i-1}, y^2z^{i-2}, z^i\} & \text{para } i \geq 3
\end{array}$$

- Serie de Hilbert de S

$$Hilb_S(t) = 1 + 3t + 5t^2 + 5t^3 + 5t^4 + 5t^5 + \cdots = \frac{1+2t+2t^2}{1-t}$$

- Multiplicidad de S

$$e(S) = 1 + 2 + 2 = 5$$

Remarks:

- $I \subset R$, $I = q_1 \cap \ldots \cap q_m$ (descomposición primaria irredundante)

$$\mathrm{e}(R/I) = \sum_{ht(I)=ht(q_i)} \mathrm{e}(R/q_i).$$

- I es un ideal radical no-mezclado, $f \in R$ un polinomio homogéneo tal que $(I : f) \neq I$ y $\mathcal{A}$ es el conjunto de todos los primos asociados de R/I que contienen a f, entonces $ht(I) = ht(I, f)$

$$\mathrm{e}(R/(I, f)) = \sum_{p \in \mathcal{A}} \mathrm{e}(R/p).$$

$$\mathcal{F}_t = \{\, f \in R_t \mid f \notin I,\ (I : f) \neq I \}.$$

$$\mathcal{F}_t = \{\, f \in R_t \,|\, f \notin I,\ (I : f) \neq I \}.$$

$(I : f) \neq I$ es equivalente a $f \in \mathfrak{p}$ para algún $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I)$

$\mathrm{Ass}(R/I)$ es el conjunto de primos asociados de R/I.

La δ-función de I, es la función $\delta_I : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{Z}$ dado por

$$\delta_I(t) = \begin{cases} \mathrm{e}(R/I) - \text{máx}\{\mathrm{e}(R/(I,f)) |\, f \in \mathcal{F}_t\} & \text{si } \mathcal{F}_t \neq \emptyset, \\ \mathrm{e}(R/I) & \text{si } \mathcal{F}_t = \emptyset. \end{cases}$$

Theorem 1 (Núñez-Betancourt, Pitones, Villarreal (2020))

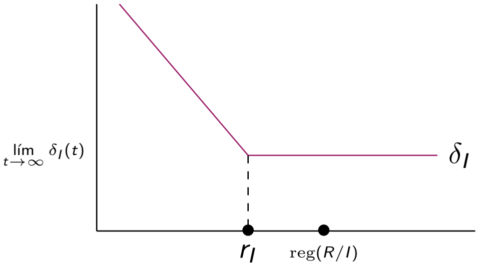
Supongamos que I es un ideal radical. Entonces, $\delta_I(d)$ es una función decreciente.

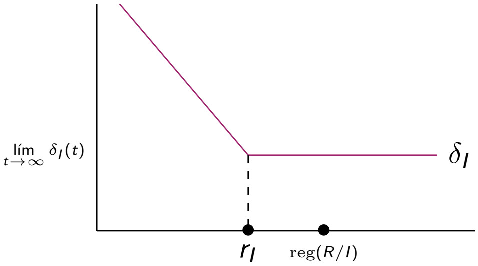
$$\delta_I(1) > \delta_I(2) > \cdots > \delta_I(r_I) = \delta_I(d) \quad para \quad d \geq r_I.$$

Definition 2

Sea I un ideal radical. El índice de regularidad de I, denotado por r_I, es definido por

$$r_I = \text{mín}\{s \in \mathbb{N} \mid \ \delta_I(s) = \lim_{t\to\infty} \delta_I(t)\}.$$


$\lim_{t\to\infty} \delta_I(t)$
δ_I
r_I
$\mathrm{reg}(R/I)$



r_I es el punto de estabilización de la δ-función, en general, r_I es díficil de calcular. Esta relacionado con la multiplicidad de Castelnuovo–Mumford.

Sea $K = \mathbb{F}_q$ un campo finito. Un *código lineal* $\mathcal{C}$ es un subespacio de K^m, para algún m.

Parámetros básicos

- Longitud: m.
- Dimensión: $\dim_K \mathcal{C}$.
- Distancia mínima: $\delta(\mathcal{C}) := min\{\|v\| : 0 \neq v \in \mathcal{C}\}$.

$\|v\|$: # de entradas no cero de v (peso de Hamming).

- $\mathbb{Y} = \{P_1, ..., P_m\}$

- $\mathbb{Y} = \{P_1, ..., P_m\}$

- $\mathbb{Y} = \{P_1, ..., P_m\}$
- Definimos una K-aplicación lineal:

$$ev_d : R_d \longrightarrow K^{|\mathbb{Y}|}$$
$$f \mapsto (f(P_1), \ldots, f(P_m))$$

- $\mathbb{Y} = \{P_1, ..., P_m\}$
- Definimos una K-aplicación lineal:

$$ev_d : R_d \longrightarrow K^{|\mathbb{Y}|}$$

$$f \mapsto (f(P_1), \ldots, f(P_m))$$

- ev_d es una *aplicación evaluación* .

- $\mathbb{Y} = \{P_1, ..., P_m\}$
- Definimos una K-aplicación lineal:

$$ev_d : R_d \longrightarrow K^{|\mathbb{Y}|}$$
$$f \mapsto (f(P_1), \ldots, f(P_m))$$

- ev_d es una *aplicación evaluación* .
- La imagen de R_d bajo ev_d, denotada por $C_{\mathbb{Y}}(d)$ es un *Código tipo-Reed-Muller* de grado d sobre el conjunto $\mathbb{Y}$.

$ev_d : R_d \longrightarrow K^{|\mathbb{Y}|}$, $f \mapsto (f(P_1), \ldots, f(P_m))$

$$\begin{aligned} ker(ev_d) &= \{f \in R_d \mid f(P_i) = 0 \ \forall P_i \in \mathbb{Y}\} \\ &= I(\mathbb{Y})_d. \end{aligned}$$

Ideal anulador de $\mathbb{Y}$.

$ev_d : R_d \longrightarrow K^{|\mathbb{Y}|}$, $f \mapsto (f(P_1), \ldots, f(P_m))$

$$
\begin{aligned}
ker(ev_d) &= \{f \in R_d \mid f(P_i) = 0 \ \forall P_i \in \mathbb{Y}\} \\
&= I(\mathbb{Y})_d.
\end{aligned}
$$

Ideal anulador de $\mathbb{Y}$.

Entonces existe un isomorfismo de K-espacios vectoriales:

$$R_d / I(\mathbb{Y})_d \simeq C_{\mathbb{Y}}(d).$$

Definición 1

Los parametros básicos del código lineal $C_{\mathbb{Y}}(d)$ son:

- *Longitud:* $|\mathbb{Y}|$
- *Dimensión:* $dim_K(C_{\mathbb{Y}}(d))$
- *Distancia mínima:* $\delta_{\mathbb{Y}}(d)$

$$\delta_{\mathbb{Y}}(d) := min\{\|v\| : 0 \neq v \in C_{\mathbb{Y}}(d)\}$$

donde $\|v\|$ es el número de entradas no cero de v.

$$ev_d : R_d \longrightarrow K^{|\mathbb{Y}|}$$

$$f \mapsto (f(P_1), \ldots, f(P_m))$$

$$ev_d : R_d \longrightarrow K^{|\mathbb{Y}|}$$
$$f \mapsto (f(P_1), \dots, f(P_m))$$

Para $f \in R_d$, denotamos $\|f\|$ el número de no ceros de f en $\mathbb{Y}$.

$$\|f\| = |\mathbb{Y}| - |V_{\mathbb{Y}}(f)|$$

$V_{\mathbb{Y}}(f) = \{P \in \mathbb{Y} \mid f(P) = 0\}$, Conjunto de ceros de f.

$$ev_d : R_d \longrightarrow K^{|\mathbb{Y}|}$$
$$f \mapsto (f(P_1), \dots, f(P_m))$$

Para $f \in R_d$, denotamos $\|f\|$ el número de no ceros de f en $\mathbb{Y}$.

$$\|f\| = |\mathbb{Y}| - |V_{\mathbb{Y}}(f)|$$

$V_{\mathbb{Y}}(f) = \{P \in \mathbb{Y} \mid f(P) = 0\}$, Conjunto de ceros de f.

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{Y}}(d) &= min\{\|f\| \colon f \in R_d\}, \\ &= min\{|\mathbb{Y}| - |V_{\mathbb{Y}}(f)| \colon f \in R_d\} \end{aligned}$$

$$ev_d : R_d \longrightarrow K^{|\mathbb{Y}|}$$
$$f \mapsto (f(P_1), \ldots, f(P_m))$$

Para $f \in R_d$, denotamos $\|f\|$ el número de no ceros de f en $\mathbb{Y}$.

$$\|f\| = |\mathbb{Y}| - |V_{\mathbb{Y}}(f)|$$

$V_{\mathbb{Y}}(f) = \{P \in \mathbb{Y} \mid f(P) = 0\}$, Conjunto de ceros de f.

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbb{Y}}(d) &= min\{\|f\| : f \in R_d\}, \\
&= min\{|\mathbb{Y}| - |V_{\mathbb{Y}}(f)| : f \in R_d\} \\
&= |\mathbb{Y}| - max\{|V_{\mathbb{Y}}(f)| : f \in R_d
\end{aligned}$$

Sea f un polinomio homogéneo de R, el conjunto de ceros de f en $\mathbb{Y}$ es denotado por $V_{\mathbb{Y}}(f)$. Tenemos la siguiente fórmula para calcular el número de elementos de $V_{\mathbb{Y}}(f)$.

$$|V_{\mathbb{Y}}(f)| = \begin{cases} \mathrm{e}(S/(I(\mathbb{Y}), f)) & \text{si } (I(\mathbb{Y})\colon f) \neq I(\mathbb{Y}), \\ 0 & \text{si } (I(\mathbb{Y})\colon f) = I(\mathbb{Y}). \end{cases}$$

Sea f un polinomio homogéneo de R, el conjunto de ceros de f en $\mathbb{Y}$ es denotado por $V_{\mathbb{Y}}(f)$. Tenemos la siguiente fórmula para calcular el número de elementos de $V_{\mathbb{Y}}(f)$.

$$|V_{\mathbb{Y}}(f)| = \begin{cases} \mathrm{e}(S/(I(\mathbb{Y}), f)) & \text{si } (I(\mathbb{Y})\colon f) \neq I(\mathbb{Y}), \\ 0 & \text{si } (I(\mathbb{Y})\colon f) = I(\mathbb{Y}). \end{cases}$$

Teorema (J. Martínez-Bernal, – ,R. Villarreal (2017))

Si $|\mathbb{Y}| \geq 2$, entonces $\delta_{\mathbb{Y}}(d) = \delta_{I(\mathbb{Y})}(d) \geq 1$ para $d \geq 1$.

Proof sketch.

- $\delta_{I(\mathbb{Y})}(d) = \mathrm{e}(R/I(\mathbb{Y})) - max\{\mathrm{e}(R/(I(\mathbb{Y}), f)) | \, f \in \mathcal{F}_d\}$.
-
$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{Y}} &= min\{\|f\| : f \in R_d\} \\ &= |\mathbb{Y}| - max\{|V_{\mathbb{Y}}(f)| : f \in R_d\}. \end{aligned}$$
- De la observación anterior tenemos que $\mathrm{e}(S/I(\mathbb{Y}), f) = |V_{\mathbb{Y}}(f)|$, además $\mathrm{e}(R/I(\mathbb{Y})) = |\mathbb{Y}|$ y por lo tanto

$$\delta_{\mathbb{Y}} = \mathrm{e}(R/I(\mathbb{Y})) - max\{\mathrm{e}(R/I(\mathbb{Y}), f) : f \in \mathcal{F}_d\}.$$

$\square$

Sea $I = I(\mathbb{Y})$ y $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ y considere
$\mathcal{F}_{t,r} = \{\, F \subset R_t \,|\, F \not\subset I,\ (I\colon F) \neq I\}$.

Sea $I = I(\mathbb{Y})$ y $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ y considere
$\mathcal{F}_{t,r} = \{\, F \subset R_t \,|\, F \not\subset I,\ (I\colon F) \neq I \}$.

La δ-función de I, es la función $\delta_{r,I}\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{Z}$ dado por

$$\delta_{r,I}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}(R/I) - \text{máx}\{\mathrm{e}(R/(I,F))|\, F \in \mathcal{F}_{t,r}\} & \text{si } \mathcal{F}_{t,r} \neq \emptyset, \\ \mathrm{e}(R/I) & \text{si } \mathcal{F}_{t,r} = \emptyset. \end{cases}$$

Sea $I = I(\mathbb{Y})$ y $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ y considere
$\mathcal{F}_{t,r} = \{\, F \subset R_t \mid F \not\subset I,\ (I \colon F) \neq I \}$.

La δ-función de I, es la función $\delta_{r,I} \colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{Z}$ dado por

$$\delta_{r,I}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}(R/I) - \text{máx}\{\mathrm{e}(R/(I,F)) \mid F \in \mathcal{F}_{t,r}\} & \text{si } \mathcal{F}_{t,r} \neq \emptyset, \\ \mathrm{e}(R/I) & \text{si } \mathcal{F}_{t,r} = \emptyset. \end{cases}$$

Entonces: $\delta_r(C_{\mathbb{Y}}(d)) = \delta_{r,I}(d)$

$$\mathcal{M}_{\prec,d} := \{x^a \mid x^a \in \Delta_\prec(I)_d, (\mathrm{in}_\prec(I)\colon x^a) \neq \mathrm{in}_\prec(I)\},$$

Definición

La función huella de I, denotada por fp_I, es la función $\mathrm{fp}_I\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{Z}$ dada por

$$\mathrm{fp}_I(d) := \begin{cases} \mathrm{e}(R/I) - max\{\mathrm{e}(R/(\mathrm{in}_\prec(I), x^a)) \mid x^a \in \mathcal{M}_{\prec,d}\} & \text{si } \mathcal{M}_{\prec,d} \neq \emptyset, \\ \mathrm{e}(R/I) & \text{si } \mathcal{M}_{\prec,d} = \emptyset. \end{cases}$$

Sean I un ideal graduado no-mezclado y $\prec$ un orden monomial. Las siguientes se satisfacen.

(i) $\delta_I(d) \geq \mathrm{fp}_I(d)$ y $\delta_I(d) \geq 0$ para $d \geq 1$.

(ii) $\mathrm{fp}_I(d) \geq 0$ si $\mathrm{in}_\prec(I)$ es no-mezclado.

Sean I un ideal graduado no-mezclado y $\prec$ un orden monomial. Las siguientes se satisfacen.

(i) $\delta_I(d) \geq \mathrm{fp}_I(d)$ y $\delta_I(d) \geq 0$ para $d \geq 1$.

(ii) $\mathrm{fp}_I(d) \geq 0$ si $\mathrm{in}_\prec(I)$ es no-mezclado.

- $\mathrm{e}(R/I) = \mathrm{e}(R/\mathrm{in}_\prec(I))$
- $\mathrm{e}(R/(I, f)) \leq \mathrm{e}(R/(\mathrm{in}_\prec(I), \mathrm{in}_\prec(f))$

Gracias!